Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

J. B. Lasserre
F. Roubellat

Une méthode rapide de résolution de certaines programmes linéaires à structure en escalier

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 14, nº 2 (1980), p. 171-191.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1980__14_2_171_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 14, n° 2, mai 1980, p. 171 à 191)

UNE MÉTHODE RAPIDE DE RÉSOLUTION DE CERTAINS PROGRAMMES LINÉAIRES A STRUCTURE EN ESCALIER (*)

par J. B. LASSERRE [1] et F. ROUBELLAT [1]

Résumé. — *Une méthode de résolution de certains problèmes de programmation linéaire à structure « en escalier » est présentée. En mettant en évidence une propriété de la matrice des contraintes le problème est résolu en une séquence de* $2N-1$ *sous-problèmes (si N est le nombre de « marches »). Une condition suffisante pour appliquer la méthode est donnée.*

Dans la réalité peu de problèmes ont cette propriété. Souvent, seule une sous-matrice de la matrice des contraintes la possède. Aussi pour exploiter cette propriété, les exemples présentés utilisent le principe de décomposition de Dantzig-Wolfe. La sous-matrice ayant la propriété énoncée devient alors la matrice du sous-problème qu'il faut résoudre en utilisant le principe de décomposition. L'autre sous-matrice devient celle du maître programme. La résolution du sous-problème étant très rapide on peut dire que la résolution du problème initial se ramène pratiquement à celle d'un problème dont le nombre de contraintes est celui de la matrice du maître programme.

Des résultats d'application sur un problème de planification de production de grande taille sont présentés.

Abstract. — *A method for solving a class of multistage linear programming problems is presented. Using a property of the constraints matrix, we replace the original problem by a finite sequence of* $2N-1$ *subproblems (if there are N steps). A sufficiency condition on the constraints matrix for the method to be valid, is given. In fact, few problems have this property. Often, only a submatrix satisfies the sufficiency condition. So, to take this fact into account in the presented examples, we have used the Dantzig Wolfe decomposition principle. The submatrix which has the required property becomes the matrix of the subproblem to be solved at each iteration of the Dantzig Wolfe's method. The other submatrix is the matrix of the master program. As we solve the subproblem very efficiently, solving the original problem is practically equivalent to solving a linear programming problem with a number of constraints equal to the row number of the master program matrix, which can be a great benefit.*

Applicationnal results about a large scale production planning problem are also presented.

(*) Reçu juillet 1978.

[1] Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du Centre national de la Recherche Scientifique, Toulouse.

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0842/1980/171 /$ 5.00

Dans cet article, nous nous intéressons à la résolution d'un certain type de problèmes de programmation linéaire, connu sous le nom de « problèmes en escaliers », qui peut être représenté par la structure suivante :

$$\left.\begin{array}{l} A_1 X_1 = b_1, \\ \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} X_j + A_i X_i = b_i \quad \text{pour} \quad 2 \leqq i \leqq N, \\ X_i \geqq 0, \quad \forall_i, \\ \max \sum_{i=1}^{n} C_i X_i, \end{array}\right\} \tag{1}$$

où A_i, L_{ij} sont des matrices, b_i, X_i des vecteurs colonnes et C_i des vecteurs lignes.

Ce type de problèmes a fait l'objet de nombreux travaux, et un certain nombre de méthodes existent pour le résoudre [1 à 4].

Pour notre part, nous avons été amenés à nous intéresser à ce type de problèmes à travers deux études ayant pour objet la planification d'unités de production [5, 6]. Les modèles définis pour la planification à moyen terme de ces unités se prêtent particulièrement bien à l'application de la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe, que nous avons retenue pour les traiter [6, 7]. Chacun des sous-problèmes associés à cette méthode est de la forme (1) et a des particularités et des propriétés telles que nous avons pu définir une méthode qui, quand une certaine hypothèse de base est vérifiée, permet de les résoudre assez simplement, en traitant $2N-1$ sous-problèmes de taille plus réduite. C'est cette méthode que nous nous proposons de présenter et de justifier ici. Un des deux exemples d'application que nous avons traités est présenté également, ainsi que d'autres cas de modèles traités par une méthode classique et qui pourraient être résolus à l'aide de la méthode proposée, en utilisant toujours la décomposition de Dantzig-Wolfe.

I. STRUCTURE DU MODÈLE RETENU

Pour le problème de gestion de production que nous avons traité par la méthode proposée, le modèle retenu prend en compte seulement les contraintes essentielles du processus de fabrication, à savoir [6, 7] :

(*a*) Les contraintes de gammes de fabrication, qui imposent une cohérence sur l'état d'avancement des différentes opérations de chaque produit; elles s'écrivent pour chaque produit i, $1 \leqq i \leqq p$:

$$\Delta_T \quad \left\{ \begin{array}{l} X(\alpha, i, k) = X(\alpha, i, k-1) \\ \quad + XS(\alpha-1, i, k) - XS(\alpha, i, k), \\ \quad 2 \leqq \alpha \leqq N_i, \\ XS(\alpha, i, k) \leqq \sum_{j=0}^{n_\alpha} X(\alpha-j, i, k-1), \\ X(1, i, k) = X(1, i, k-1) - XS(1, i, k), \\ X(\alpha, i, k) \geqq 0, \quad XS(\alpha, i, k) \geqq 0, \end{array} \quad k = 1, \ldots, T, \right\} \tag{2}$$

où α est l'indice du rang de l'opération dans la gamme du produit i, n_α étant un paramètre connu lié à α, et tel que $n_\alpha \geqq n_{\alpha+1} - 1$; k est l'indice de l'intervalle de discrétisation de l'horizon d'optimisation T; $X(\alpha, i, k)$ est la quantité du produit i en attente devant l'opération α au début de l'intervalle $k+1$; $X(\alpha, i, k) \geqq 0$; $XS(\alpha, i, k)$ est la quantité du produit i qui subit l'opération α pendant l'intervalle k; $XS(\alpha, i, k) \geqq 0$.

(*b*) Les contraintes liées à la limitation des moyens disponibles pour réaliser les différentes opérations; elles s'écrivent :

$$\sum_{(\alpha, i) \in I_\beta} XS(\alpha, i, k) f_\beta(\alpha, i) \leqq 1, \tag{3}$$

où β est l'indice des moyens $1 \leqq \beta \leqq M$; I_β est l'ensemble des couples (α, i) tels que l'opération α du produit i utilise la machine β; $[f_\beta(\alpha, i)]^{-1}$ est la quantité maximale du produit i que la machine β peut exécuter pour l'opération α sur l'intervalle k.

(*c*) Les contraintes associées aux objectifs de livraison proposés à la fabrication, sous la forme de quantités $Q(i, k)$ du produit i à fabriquer pour l'intervalle k :

$$\sum_{j=1}^{k} XS(N_i, i, j) = \sum_{j=1}^{k} Q(i, j) + \varepsilon(i, k). \tag{4}$$

Cette contrainte a pour but de mettre en évidence la variable d'écart $\varepsilon(i, k)$ qui intervient dans le critère.

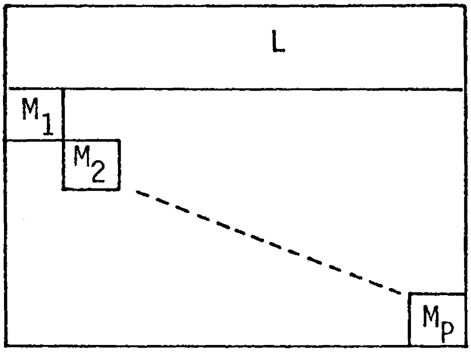
Compte tenu de la structure linéaire des contraintes ainsi définies, nous avons choisi d'utiliser un critère linéaire ayant deux composantes :

— la première pénalise l'écart ε entre les quantités à livrer et les quantités effectivement fabriquées sur chaque intervalle;

— la seconde pénalise l'écart entre la capacité de moyens disponibles et la charge effectivement planifiée, sur chaque intervalle.

L'expression détaillée de ce critère est donnée en [7]. Le plan de production à moyen terme cherché est alors défini par l'ensemble des $XS(\alpha, i, k)$ obtenus pour la solution optimale du programme linéaire ainsi défini (en tenant compte évidemment de la positivité des variables X, XS).

Pour un tel programme la matrice des contraintes peut se mettre sous la forme :



où les blocs M_i sont les contraintes de gamme (2) propres à chaque produit, la matrice L regroupant les autres contraintes (3) et (4). Cette structure est typique pour l'application de la méthode de décomposition-coordination de Dantzig-Wolfe que nous avons retenue pour traiter ce problème [6, 7]. Toutefois au niveau de chacun des sous-problèmes liés aux matrices M_i, les modèles retenus sont tels que l'on retrouve la structure en escalier du modèle (1). C'est pourquoi il nous a paru intéressant de pouvoir résoudre le plus simplement possible chacun de ces sous-problèmes, en exploitant au maximum leurs particularités. Ceci nous a conduit à définir la méthode suivante.

II. PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE

Cette méthode a donc pour but de résoudre les sous-problèmes associés à la décomposition de Dantzig-Wolfe, qui sont définis par les contraintes de la forme (2). Chacun de ces sous-problèmes est bien de la forme générale (1), que nous utilisons pour l'exposé de la méthode.

Au problème défini par (1), nous pouvons associer N sous-problèmes P_i, $1 \leqq i \leqq N$ définis par

$$\left.\begin{aligned} &P_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_i X_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} X_j^*, & X_i \geqq 0, \quad 2 \leqq i \leqq N, \\ \max \tilde{C}_i X_i \end{cases} \\ &\text{et} \\ &P_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_1 X_1 = b_1, \\ \max \tilde{C}_1 X_1, \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

avec

$$\tilde{C}_N = C_N, \qquad \tilde{C}_i = C_i - \sum_{j=i+1}^{N} \lambda_j L_{ji} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq N-1, \tag{6}$$

λ_j, solution optimale du dual du sous-problème P_j défini par

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_j A_j \geqq \tilde{C}_j, \\ &\min \lambda_j \left[b_j - \sum_{l=1}^{j-1} L_{jl} X_l^* \right], \end{aligned} \quad 2 \leqq j \leqq N, \right\} \tag{7}$$

X_j^*, solution admissible quelconque du système linéaire

$$A_j X_j^* = b_j - \sum_{l=1}^{j-1} L_{jl} X_l^*, \quad 2 \leqq j \leqq N, \qquad A_1 X_1^* = b_1. \tag{8}$$

Nous supposons alors que l'hypothèse suivante est vérifiée :

(a) Hypothèse de base

$\forall i$, $2 \leqq i \leqq N$, la solution optimale λ_i du dual du problème P_i défini par (9) :

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_i A_i \geqq \tilde{C}_i, \\ &\min \lambda_i \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} X_j^* \right], \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

existe et est constante $\forall X_j^*$ satisfaisant la condition (8).

Sous cette hypothèse, on va définir une procédure permettant de construire simplement une solution admissible du problème initial (1) et une solution admissible du problème dual initial. On montrera alors que la fonction critère calculée pour cette solution du problème initial est égale à la fonction critère du dual calculée pour la solution duale construite. Donc, la solution construite est bien optimale.

(b) Procédure

Première étape : Résoudre les problèmes P_i pour $i=N, N-1, \ldots, 2$ en utilisant une solution admissible X_j^* arbitraire.

Ceci permet de calculer les solutions optimales duales λ_i dans un ordre convenable pour calculer les valeurs $\tilde{C}_i$.

Deuxième étape : Résoudre les problèmes P_i pour $i=1, 2, \ldots, N$ en utilisant les solutions optimales duales λ_i calculées à l'étape 1 et en choisissant pour X_j^* les solutions optimales X_j obtenues pour P_j, $1 \leqq j \leqq i-1$.

(c) Proposition

Les solutions $X=(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ et $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$ ainsi construites sont les solutions optimales primale et duale du problème initial défini par (1).

(d) Démonstration

(i) par construction, la solution X est admissible pour le problème primal;

(ii) par construction, la solution Λ est également admissible pour le problème dual.

En effet on a bien

$$\lambda_N A_N \geqq C_N, \qquad \text{dual de } P_N,$$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_{N-1} A_{N-1} \geqq \tilde{C}_{N-1} = C_{N-1} - \lambda_N L_{NN-1}, \\ \lambda_{N-1} A_{N-1} + \lambda_N L_{NN-1} \geqq C_{N-1}, \end{array}\right\} \quad \text{dual de } P_{N-1},$$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_i A_i \geqq \tilde{C}_i = C_i - \sum_{j=i+1}^{N} \lambda_j L_{ji}, \\ \lambda_i A_i + \sum_{j=i+1}^{N} \lambda_j L_{ji} \geqq C_i, \end{array}\right\} \quad \text{dual de } P_i,$$

(iii) dans la deuxième étape de la procédure, on a, à la solution optimale pour chaque P_i :

$$\tilde{C}_i X_i = \lambda_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} X_j \right), \tag{10}$$

d'après la propriété des solutions optimales primale et duale, et l'hypothèse de base retenue.

On a donc, en revenant à la définition des $\tilde{C}_i$:

$$C_i X_i - \left(\sum_{j=i+1}^{N} \lambda_j L_{ji} \right) X_i = \lambda_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} X_j \right),$$

en faisant la somme on obtient :

$$\sum_{i=1}^{N} C_i X_i = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i b_i - \sum_{i=2}^{N} \lambda_i \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} X_j + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sum_{j=i+1}^{N} \lambda_j L_{ji} \right) X_i.$$

Montrons que les deux derniers termes s'annulent. Pour cela calculons le coefficient du terme en X_k dans le premier. Ce coefficient est égal à

$$-\sum_{i=k+1}^{N} \lambda_i L_{ik}$$

qui est bien égal au signe près au coefficient de X_k dans le dernier terme.

Donc, pour les solutions admissibles X du primal et Λ du dual calculées par la procédure, on a

$$\sum_{i=1}^{N} C_i X_i = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i b_i.$$

Cette égalité des valeurs des critères du primal et du dual montre bien que les solutions ainsi construites sont optimales.

(e) Conclusion

Donc, si l'hypothèse de base (*a*) est vérifiée, la résolution du problème d'optimisation linéaire (1) se ramène à la résolution séquentielle de $2N-1$ problèmes de type (5), de taille beaucoup plus réduite.

REMARQUE : En fait l'hypothèse de base ci-dessus peut être remplacée par une hypothèse moins forte, à savoir : pour tout i tel que $2 \leqq i \leqq N$, on sait calculer la solution duale optimale du sous-problème P_i sans connaître les solutions optimales des sous-problèmes P_j pour $1 \leqq j \leqq i-1$.

On verra que c'est le cas pour l'exemple que nous présentons.

En effet, pour que la relation (10), qui est à la base de la démonstration ci-dessus, puisse être écrite, il suffit d'être assuré que les valeurs λ_i qui y interviennent sont les solutions optimales du dual (7) lorsque les valeurs X_l^* qui interviennent dans le critère de (7) sont les solutions optimales, inconnues *a priori*, des sous-problèmes P_l, $1 \leqq l \leqq i-1$.

III. APPLICATION AU MODÈLE PROPOSÉ

Pour le modèle proposé en *I*, les sous-problèmes Δ_T issus de la décomposition de Dantzig-Wolfe, définis par les contraintes (2), sont bien de la forme générale (1) :

$$\Delta_T \quad \begin{cases} A_k X_k = b_k - L_{kk-1} X_{k-1}, & K=2, \ldots, T, \\ A_1 X_1 = b_1, \end{cases}$$

On va montrer que l'hypothèse de base est vraie pour les sous-problèmes de Δ_T. Pour cela, on fera la démonstration pour le dernier sous-problème

$$\left.\begin{array}{c} A_T X_T = b_T - L_{TT-1} X_{T-1}, \qquad X_T \geqq 0, \\ \max C_T X_T \end{array}\right\} \tag{11}$$

et on va montrer que la propriété est vraie à condition de changer parfois L_{TT-1} en $\tilde{L}_{TT-1}$, c'est-à-dire en transformant le problème initial Δ_T en $\tilde{\Delta}_T$, mais on montre que ces deux problèmes ont la même solution.

Ensuite, on réitère le même raisonnement sur

$$\Delta_{T-1} \left\{\begin{array}{c} A_1 X_1 = b_1, \\ A_k X_k = b_k - L_{kk-1} X_{k-1}, \\ X_1 \geqq 0, \qquad X_k \geqq 0, \\ \max \sum_k \tilde{C}_k X_k, \end{array}\right\} \quad k=2, \ldots, T-1$$

et ainsi de suite jusqu'à Δ_2.

Le sous-problème (11) s'écrit en l'explicitant (et en supprimant l'indice i pour alléger l'écriture) :

$$\left.\begin{array}{c} X(\alpha, T) + XS(\alpha, T) = X(\alpha, T-1) + XS(\alpha-1, T), \\ XS(\alpha, T) \leqq \sum_{j=0}^{n_\alpha} X(\alpha-j, T-1), \\ 2 \leqq \alpha \leqq N, \\ X(1, T) + XS(1, T) = X(1, T-1), \\ X \geqq 0, \qquad XS \geqq 0, \\ \max \sum_{\alpha=1}^{N} C_\alpha X(\alpha, T) + \sum_{\alpha=1}^{N} C'_\alpha XS(\alpha, T). \end{array}\right\} \tag{12}$$

Pour alléger l'écriture, nous posons également

$$\left.\begin{array}{ll} u_\alpha = X(\alpha, T-1), & X(\alpha, T) = X_\alpha, \\ v_\alpha = \sum_{j=0}^{n_\alpha} X(\alpha-j, T-1), & XS(\alpha, T) = XS_\alpha, \end{array}\right\} \tag{13}$$

(12) s'écrit sous la forme :

$$D_N \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X_\alpha + XS_\alpha - XS_{\alpha-1} = u_\alpha, \qquad 2 \leqq \alpha \leqq N, \\ XS_\alpha \leqq v_\alpha, \\ X_1 + XS_1 = u_1, \\ X \geqq 0, \qquad XS \geqq 0, \\ \max\left[\sum_{\alpha=1}^{N} C_\alpha X_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} C'_\alpha XS_\alpha\right]. \end{array} \right\} \tag{14}$$

Or D_N correspond à la structure définie en (1). Pour résoudre ce problème D_N, nous allons donc essayer de lui appliquer aussi la méthode proposée. Pour celà, il faut démontrer que l'hypothèse de base s'applique à ce problème D_N. Au problème D_N on peut associer deux sous-problèmes

$$D_{N-1} \left\{ \begin{array}{c} X_\alpha + XS_\alpha - XS_{\alpha-1} = u_\alpha, \\ XS_\alpha \leqq v_\alpha, \qquad 2 \leqq \alpha \leqq N-1, \\ X_1 + XS_1 = u_1, \\ X \geqq 0, \qquad XS \geqq 0, \\ \max\left[\sum_{\alpha=1}^{N-1} \tilde{C}_\alpha X_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N-1} \tilde{C}'_\alpha XS_\alpha\right], \end{array} \right\} \tag{15}$$

$$\left. \begin{array}{c} X_N + XS_N = u_N + XS_{N-1}, \\ XS_N \leqq v_N, \qquad X_N \geqq 0, \qquad XS_N \geqq 0, \\ \max(C_N X_N + C'_N XS_N). \end{array} \right\} \tag{16}$$

Le dual de (16) s'écrit :

$$\left. \begin{array}{c} \lambda_N \geqq C_N, \\ \lambda_N + \lambda'_N \geqq C'_N, \\ \lambda'_N \geqq 0, \\ \min[(u_N + XS_{N-1})\lambda_N + v_N \lambda'_N]. \end{array} \right\} \tag{17}$$

Pour calculer la solution optimale $\overline{\lambda}_{N'}$, $\overline{\lambda}'_N$ de ce dual, deux cas sont à considérer :

Premier cas :

$$C'_N < C_N,$$

alors :

$$\overline{\lambda}_N = C_N, \qquad \overline{\lambda}'_N = 0.$$

donc la solution optimale du dual est évidemment indépendante du choix de XS_{N-1}.

Deuxième cas :

$$C'_N \geqq C_N.$$

La solution optimale de (17) dépend du rapport

$$r_N = \frac{u_N + XS_{N-1}}{v_N}.$$

En effet, si $r_N \geqq 1$:

$$\bar{\lambda}_N = C_{N'}, \qquad \bar{\lambda}'_N = C'_N - C_N,$$

si $r_N \leqq 1$:

$$\bar{\lambda}_N = C'_N, \qquad \bar{\lambda}'_N = 0.$$

Donc *a priori,* dans ce cas, la solution optimale du dual dépend du choix de XS_{N-1}.

Or nous avons démontré (*cf.* Annexe) que l'on avait

$$\left.\begin{array}{lll} (A) & \Rightarrow & \exists \text{ au moins un optimum } \bar{X} \text{ tel que } u_N + \overline{XS}_{N-1} \geqq v_N, \\ \text{non}(A) & \Rightarrow & \text{à l'optimum } u_N + \overline{XS}_{N-1} \leqq v_N, \end{array}\right\} \tag{18}$$

avec

$$A \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} C'_{N-n_N-1} + C'_{N-n_N} + \ldots + C'_{N-1} + C_N \geqq C_{N-n_N-1}, \\ C'_{N-n_N} + \ldots + C'_{N-1} + C_N \geqq C_{N-n_N}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C'_{N-1} + C_N \geqq C_{N-1}, \end{array}\right\} \tag{19}$$

et cela dans le cas où $n_{N-1} \geqq n_N$, car sinon, par hypothèse, on a $u_N + \overline{XS}_{N-1} \leqq v_N$.

Donc, à l'optimum, la valeur de r_N par rapport à 1 dépend uniquement des données du problème, d'après les conditions (19) :

Premier cas

Les conditions (19) *ne sont pas toutes satisfaites*

Alors $u_N + \overline{XS}_{N-1} \leqq v_N$ et la solution optimale du dual (17) est :

$$\bar{\lambda}_N = C'_N, \qquad \bar{\lambda}'_N = 0.$$

Il est alors possible, puisque la relation (18) est démontrée à l'optimum de transformer le problème D_{N-1} en $\tilde{D}_{N-1}$, en remplaçant la contrainte initiale $XS_{N-1} \leqq v_{N-1}$ par la nouvelle contrainte

$$XS_{N-1} \leqq v_N - u_N \qquad \text{et} \qquad n_{N-1} = n_N - 1.$$

Ceci nous permet de définir un nouveau problème transformé $\tilde{D}_N$ qui a même solution optimale que D_N.

Sur ce nouveau problème, le dual du sous-problème (16) vérifie l'hypothèse de base.

Deuxième cas :

Les conditions (19) *sont toutes satisfaites*

Alors $u_N+\overline{XS}_{N-1}\geqq v_N$ et la solution optimale du dual (16) est :

$$\bar{\lambda}_N=C_N, \qquad \bar{\lambda}'_N=C'_N-C_N.$$

Or il est possible de montrer que $\exists$ au moins un optimum du sous-problème D_{N-1} qui satisfait toujours la condition $r_n\geqq 1$, ce qui est suffisant pour l'utilisation de l'hypothèse de base, d'après la remarque finale du paragraphe I.

En effet, dans D_{N-1}, on a

$$\tilde{C}'_{N-1}=C'_{N-1}+\bar{\lambda}_N$$

ou

$$\tilde{C}'_{N-1}=C'_{N-1}+C_N.$$

Comme d'après (19) on a

$$C'_{N-n_N-1}+\ldots+\tilde{C}'_{N-1}\geqq C_{N-n_N-1},$$

il existe au moins une solution optimale de D_{N-1} telle que

$$\overline{XS}_{N-n_N-1}\geqq u_{N-n_N-1}.$$

En effet, supposons que la solution optimale S obtenue est telle que

$$\overline{XS}_{N-n_N-1}<u_{N-n_N-1} \quad \text{(si évidemment } u_{N-n_N-1}>0).$$

Soit alors ε tel que $\varepsilon=u_{N-n_N-1}-\overline{XS}_{N-n_N-1}$.

On peut construire à partir de S une nouvelle solution S' qui utilise toutes les valeurs des variables $\bar{X}$ et $\overline{XS}$ obtenues pour S, sauf pour les variables définies ci-dessous :

$$\begin{cases} XS'_{N-j}=\overline{XS}_{N-j}+\varepsilon \qquad \text{pour} \quad j=1,\ \ldots,\ n_N+1,\\ \qquad X'_{N-n_N-1}=\bar{X}_{N-n_N-1}-\varepsilon. \end{cases}$$

Une telle solution S' est encore admissible par construction. De plus, la valeur du critère qui lui est associée est celle de S modifiée de la quantité

$$\delta=\varepsilon(C'_{N-n_N-1}+C'_{N-n_N}+\ldots+C'_{N-1}+C_N)\geqq 0,$$

puisque (A) est vérifiée.

Donc : si $\delta > 0$, on démontre ainsi par l'absurde que S ne pouvait pas être une solution optimale, donc que à l'optimum on a bien

$$\overline{XS}_{N-n_N-1} \geqq u_{N-n_N-1},$$

si $\delta = 0$, S' représente une nouvelle solution optimale vérifiant bien

$$\overline{XS}_{N-n_N-1} \geqq u_{N-n_N-1}.$$

En répétant ce raisonnement, on peut montrer que l'on a une solution optimale de D_{N-1} telle que

$$\overline{XS}_{N-j} \geqq u_{N-n_N-1} + u_{N-n_N} + \ldots + u_{N-j}$$

pour $j = 1, \ldots, n_N + 1$.

Donc à l'optimum de D_{N-1} on aura bien

$$\overline{XS}_{N-1} + u_N \geqq \sum_{j=0}^{n_N+1} u_{N-j} = v_N + u_{N-n_N-1},$$

ou encore

$$\overline{XS}_{N-1} + u_N \geqq v_N.$$

Par suite il existe un optimum ayant la propriété voulue.

Donc en étendant cette démonstration à tous les problèmes D_α (ou $\tilde{D}_\alpha$ si D_α a été transformé) $1 \leqq \alpha \leqq N-1$, on démontre bien que l'on sait construire une solution optimale du dual de D_N qui ne dépend que des données de D_N et qui est donc indépendante de u_α et v_α.

Par suite, en revenant aux définitions (13) de u_α et v_α, ceci démontre que la solution du dual du sous-problème (11) vérifie l'hypothèse de base, à condition toutefois de transformer dans certains cas Δ_T en $\tilde{\Delta}_T$ lorsque certains D_α sont transformés en $\tilde{D}_\alpha$.

Par suite l'application de la méthode proposée à la résolution des sous-problèmes de la forme (2) est possible. Nous avons donc testé cette méthode, sur IBM 370-168 : pour un sous-problème de 1 500 variables, 1 500 contraintes, le temps de traitement est de 8/100 de seconde au lieu de 1 mn 9 s si l'on utilise le code IBM MPSX/370 de programmation linéaire; un sous-problème de 600 variables et 600 contraintes est résolu en moins de 1/100 de seconde.

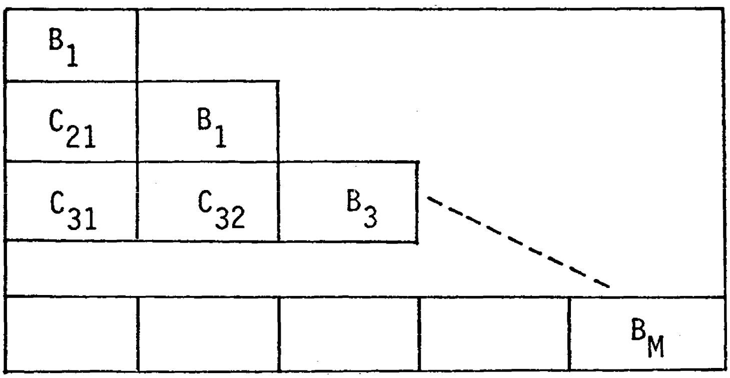
En revenant au problème global à traiter dans le cas de l'application retenue, on obtient un problème de 2 208 contraintes et 2 709 variables. La décomposition de Dantzig-Wolfe donne un maître programme de 470 contraintes. Les 5 sous-problèmes obtenus ont une taille qui varie entre 440 contraintes et 490 variables et 272 contraintes et 322 variables.

Pour le problème global, les résultats obtenus en utilisant cette méthode pour résoudre les sous-problèmes issus de la décomposition sont donnés sur le tableau, pour 9 problèmes différents. On peut remarquer que l'utilisation de la décomposition de Dantzig-Wolfe entraîne un phénomène de « queue » (convergence asymptotique vers l'optimum), qui pourrait être éliminé en utilisant la variante dite du « multiple pricing » [8]. Toutefois, si on appelle Δ la différence entre les valeurs du critère pour la solution initiale et pour l'optimum, dans tous les cas on a fait baisser cette valeur de plus de 999 $\Delta/1\,000$ en moins de 4 minutes de calcul sur IBM 370-168, avec 200 K de mémoire centrale. En utilisant le code MPSX 370, l'optimum a toujours été atteint pour des temps compris entre 2 mn 30 s et 5 minutes, et avec 800 K de mémoire centrale (si on réduit la place en mémoire, le temps de calcul croît rapidement).

IV. CONDITION SUFFISANTE POUR QUE L'HYPOTHÈSE DE BASE SOIT VÉRIFIÉE

L'exemple d'application précédent montre que la démarche, pour vérifier l'hypothèse de base nécessaire pour l'utilisation de la méthode proposée, peut être complexe. Or nous avons constaté que l'approche par la décomposition de Dantzig-Wolfe utilisant la méthode proposée pour traiter les sous-problèmes était applicable à d'autres modèles de planification aux caractéristiques voisines de celles du cas concret étudié [4, 5, 9, 10]. Ceci nous a conduit à définir une condition suffisante simple permettant de conclure qu'un programme linéaire de la forme (1) peut être résolu à l'aide de la méthode proposée. Cette condition est applicable aux modèles cités en [4, 5, 9, 10]. Elle se décompose en deux parties, pour les modèles de la forme (1) :

(i) A_i est de la forme, ou peut être réarrangé sous la forme, d'une matrice triangulaire par blocs, où chaque bloc n'a qu'une ligne, selon le schéma de la figure ci-dessous :



TABLEAU

	Critère optimal	Nombre d'itérations pour atteindre l'optimum	Nombre d'itérations pour baisser le critère de $\frac{999\Delta}{1000}$	Valeur du critère	Valeur du critère après 400 itérations	Valeur du critère après 500 itérations	Critère initial	Taille du problème initial
P 1	137 468	272	66	138 355	–	–	1 024 630	2 208 contraintes 2 709 variables
P 2	123 532	557	124	124 372	123 536	123 532	1 048 740	–
P 3	110 245	419	142	110 553	110 246	–	821 414	–
P 4	19 267	> 700	400	20 259	20 259	20 112	1 023 110	–
P 5	2 693 300	> 2 600	285	2 702 100	2 693 520	2 693 400	11 560 300	–
P 6	122 510	> 400	220	123 300	122 582	–	1 009 290	–
P 7	795 680	> 750	380	806 492	806 262	805 461	2 961 530	–
P 8	283 161	289	218	283 909	–	–	1 001 380	1 802 contraintes 2 100 variables
P 9	137 468	450	146	138 355	137 468	–	1 024 630	2 780 contraintes 3 381 variables

les éléments b_{il}, $l=1, \ldots, n_i$, des blocs diagonaux B_i sont tels que l'un au moins de ces éléments est strictement positif, et tous les éléments des blocs de type C sont négatifs ou nuls.

(ii) tous les éléments des matrices L_{ij} sont négatifs ou nuls, et tous les b_i sont positifs ou nuls.

Sous ces conditions, la solution optimale du dual du problème P_i qui peut s'écrire :

$$P_i \Leftrightarrow \begin{cases} A_i X_i = \alpha, & (\alpha \geqq 0 \text{ car } \alpha = (b_i - L_{ij} X_j^*) \geqq 0), \\ & X_i \geqq 0, \\ & \max \tilde{C}_i X_i, \end{cases}$$

est indépendante de α, donc vérifie l'hypothèse de base.

En effet, le problème P_i ainsi défini est lui aussi un problème « en escalier », d'après la structure de la matrice A_i. On peut donc essayer de lui appliquer la méthode proposée, en le décomposant en M sous-problèmes de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{ll} B_i Y_i = \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij} Y_j, & 2 \leqq i \leqq M \\ \qquad Y_i \geqq 0, & \\ \qquad \max \tilde{d}_i Y_i & \end{array} \\ \text{et} \\ \qquad \begin{cases} B_1 Y_1 = \alpha_1, \\ Y_1 \geqq 0, \\ \max \tilde{d}_1 Y_1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Le sous-problème de rang i s'écrit encore :

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^{n_i} b_{il} y_{il} = \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij} Y_j, \\ y_{il} \geqq 0, \\ \max \sum_{l=1}^{n_i} \tilde{d}_{il} y_{il}. \end{cases}$$

$\forall_i$, la solution optimale du dual de ce sous-problème ne dépend pas des valeurs de Y_j, $j=1, \ldots, i-1$. En effet, ce dual s'écrit :

$$\begin{cases} b_{il} \lambda_{il} \geqq \tilde{d}_{il}, \qquad l=1, \ldots, n_i, \\ \min \left(\alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij} Y_j \right) \lambda_i \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \lambda_i \geqq \dfrac{\tilde{d}_{il}}{b_{il}} & \text{pour les indices } l \text{ tels que } b_{il} > 0, \\ \lambda_i \leqq \dfrac{\tilde{d}_{il}}{b_{il}} & \text{pour les indices } l \text{ tels que } b_{il} < 0, \\ & \min \left(\alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij} Y_j \right) \lambda_i . \end{cases}$$

Donc :
si

$$\max_{b_{il} > 0} \frac{\tilde{d}_{il}}{b_{il}} \leqq \min_{b_{il} < 0} \frac{\tilde{d}_{il}}{b_{il}},$$

la valeur optimale du dual est :

$$\lambda_i = \max_{b_{il} > 0} \frac{\tilde{d}_{il}}{b_{il}},$$

qui est bien indépendante de Y_j. Par suite, la solution optimale du dual de P_i vérifie l'hypothèse de base, ce qui démontre bien que la condition est suffisante.

Sinon, il n'y a pas de solution duale admissible et le problème primal n'a pas de solution finie.

V. CONCLUSION

La méthode proposée permet donc, dans certains cas de structure « en escalier », de résoudre très rapidement et en un nombre connu *a priori* d'itérations, des problèmes de programmation linéaire, même si la taille est importante. Par suite, dans l'utilisation qui a été faite de cette méthode pour résoudre des sous-problèmes issus d'une décomposition de Dantzig Wolfe [6, 7], ceci nous a permis de ramener pratiquement le problème initial à un problème de programmation linéaire dont la matrice des contraintes se réduit à la matrice de liaison L, ce qui réduit considérablement le temps de calcul. De plus nous avons déjà constaté que dans d'autres types de modèles proposés en gestion de production [9] ou en gestion de ressources hydro-électriques [10] par exemple, certains sous-problèmes associés à ces modèles, vérifiant la condition suffisante énoncée, pourraient être traités par la méthode proposée, ce qui devrait permettre un gain de temps de calcul appréciable.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. B. DANTZIG, *On the Status of Multistage Linear Programming Problems*, Manag. Sc., vol. 6, 1955, p. 53-72.
2. C. R. GLASSEY, *Nested Decomposition and Multistage Linear Programs*, Manag. Sc., vol. 20, n° 3, 1973, p. 282-292.
3. J. K. HO et A. S. MANNE, *Nested Decomposition for Dynamic Models*. Math. Programming, 6, 1974, North Holland Pub. Comp., p. 121-140.
4. O. B. MADSEN, *Solution of LP-Problems with Staircase Structure*, Research Report n° 26, I.M.S.O.R., 1977, Technical University of Denmark, Lyngby, Danemark.
5. P. MAHEY et F. ROUBELLAT, *Système intégré d'aide à la décision dans un atelier de production*, Annexe 1 du rapport final du contrat D.I.E.L.I.-R.T.C.-L.A.A.S., n° 76 80015, Toulouse, février 1978.
6. J. B. LASSERRE, F. ROUBELLAT et J. E. DOUCET, *Définition d'un plan de production à moyen terme pour une unité de circuits intégrés*, Annexe 3 du rapport final du contrat D.G.R.S.T.-R.T.C.-L.A.A.S. n° 76 71389, Toulouse, janvier 1978.
7. J. B. LASSERRE, *Étude de la planification à moyen terme d'une unité de fabrication*, Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Paul-Sabatier, Toulouse, 1978.
8. L. S. LASDON, *Optimization Theory for Large Scale Systems*, MacMillan Series for Operations Research, 1970.
9. O. B. MADSEN, *A case Study in Problem Structuring*, 6th Nordic Congress on Operations Research, 1977, Abo, Finlande.
10. L. J. MACHADO, *Gestion à court terme des réserves hydroélectriques à l'aide de la programmation linéaire*, Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Paul-Sabatier, Toulouse, 1976.

ANNEXE

Soit le problème D_N défini par (12) dont nous rappelons les caractéristiques :

$$D_N \left\{ \begin{array}{l} X_\alpha + XS_\alpha - XS_{\alpha-1} = u_\alpha; \qquad X_1 + XS_1 = u_1, \\ XS_\alpha \leqq v_\alpha; \quad 2 \leqq \alpha \leqq N, \qquad XS_1 \leqq v_1, \\ X_\alpha, \quad XS_\alpha \geqq 0, \qquad 1 \leqq \alpha \leqq N, \\ \max \sum_{\alpha=1}^{N} C_\alpha X_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} C'_\alpha XS_\alpha. \end{array} \right.$$

Nous voulons démontrer que

$$\operatorname{non}(A) \quad \Rightarrow \quad u_N + \overline{XS}_{N-1} \leqq v_N$$

et $(A) \Rightarrow \exists$ un optimum où $u_N + \overline{XS}_{N-1} \geqq v_N$, avec

$$(A) \qquad \begin{array}{c} C'_{N-n_N-1} + C'_{N-n_N} + \ldots + C'_{N-1} + C_N \geqq C_{N-n_N-1}, \\ C'_{N-n_N} + \ldots + C'_{N-1} + C_N \geqq C_{N-n_N}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C'_{N-1} + C_N \geqq C_{N-1}, \end{array}$$

et cela dans le cas où $n_{N-1} \geqq n_N$.

1. Démontrons que $u_N + \overline{XS}_{N-1} > v_N \Rightarrow (A)$.

Pour cela, supposons A non vérifiée. Cela implique qu'il existe $j \in (1, \ldots, n_N + 1)$ tel que

$$C'_{N-j} + \ldots + C'_{N-1} + C_N < C_{N-j} \tag{1}$$

d'autre part $u_N + \overline{XS}_{N-1} > v_N$ implique :

$$\overline{XS}_{N-1} > v_N - u_N = u_{N-1} + \ldots + u_{N-n_N} \Rightarrow \quad \overline{XS}_{N-2} > u_{N-2} + \ldots + u_{N-n_N}$$

puisque

$$\overline{X}_{N-1} + \overline{XS}_{N-1} = u_{N-1} + \overline{XS}_{N-2},$$

on démontre ainsi de proche en proche que

$$u_N + \overline{XS}_{N-1} > v_N \quad \Rightarrow \quad \overline{XS}_{N-k} = u_{N-k} + \ldots + u_{N-n_N} + \varepsilon_k,$$
$$k = 1 \ldots, j, \qquad \varepsilon_k > 0,$$

De plus, comme $C'_N > C_N$ on a $\overline{XS}_N = v_N$, $\overline{X}_N = \varepsilon_0$. Soit alors $\varepsilon = \min_{k=0, \ldots, j} \varepsilon_k$ et considérons la solution admissible de D_N définie par

$$\overline{XS}'_{N-k} = \overline{XS}_{N-k} - \varepsilon \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq k \leqq j,$$
$$\overline{X}'_N = \overline{X}_N - \varepsilon,$$
$$\overline{X}'_{N-j} = \overline{X}_{N-j} + \varepsilon,$$

les autres variables étant égales à leur valeur optimale.

Le coût $\overline{C}'$ associé à cette solution est alors, si $\overline{C}$ est le coût associé à la solution $\overline{X}$, $\overline{XS}$:

$$\overline{C}' = \overline{C} + \varepsilon \ (C_{N-j} - C'_{N-j} - C'_{N-j+1} - \ldots - C'_{N-1} - C_N).$$

Le coefficient de ε étant positif d'après (1), on a donc $\overline{C}' > \overline{C}$. Ceci voudrait donc dire que la solution $\overline{X}$, $\overline{XS}$ n'était pas la solution optimale ce qui est contraire à l'hypothèse.

2. Démontrons que $A \Rightarrow u_N + \overline{XS}_{N-1} \geqq v_N$ (si $v_N = 0$, c'est automatiquement vrai).

Supposons qu'à l'optimum on ait

$$\overline{XS}_{N-1}+u_N<v_N,$$

nous allons faire une démonstration par l'absurde : cela veut dire que

$$\overline{XS}_{N-1}<v_N-u_N=u_{N-1}+u_{N-2}+\ldots+u_{N-n_N}.$$

Deux cas se présentent selon que $\overline{X}_{N-1}$ est nul ou non.

Premier cas : $\overline{X}_{N-1}\neq 0$

On construit alors une nouvelle solution admissible

$$\overline{X}'_{N-1}=\overline{X}_{N-1}-\varepsilon,$$
$$\overline{XS}'_{N-1}=\overline{XS}_{N-1}+\varepsilon,$$
$$\overline{X}'_N=\overline{X}_N+\varepsilon.$$

les valeurs des autres variables restant inchangées avec

$$\varepsilon=\min(\overline{X}_{N-1},\ u_{N-1}+u_{N-2}+\ldots+u_{N-n_N}-\overline{XS}_{N-1})\qquad(>0).$$

Le critère $\overline{C}'$ associé à cette nouvelle solution, si $\overline{C}$ est celui associé à la solution $\overline{X}$, $\overline{XS}$, est

$$\overline{C}'=\overline{C}+\varepsilon(C'_{N-1}+C_N-C_{N-1}),$$

où

$$C'_{N-1}+C_N-C_{N-1}\geqq 0.$$

Si $(C'_{N-1}+C_N-C_{N-1})$ est strictement positif, la solution ainsi construite est meilleure que la solution $\overline{X}$, $\overline{XS}$, qui était optimale, ce qui est impossible; d'où contradiction avec l'hypothèse.

Si $(C'_{N-1}+C_N-C_{N-1})=0$, deux cas sont à envisager :

α) $\overline{X}'_{N-1}\neq 0$.

Alors on a forcément $\overline{XS}'_{N-1}+u_N=v_N$ (puisque

$$\overline{X}'_{N-1}\neq 0\Rightarrow\varepsilon=u_{N-1}+u_{N-2}+\ldots+u_{N-n_N}-\overline{XS}_{N-1}).$$

On a donc trouvé une autre solution optimale qui vérifie bien la propriété demandée.

C.Q.F.D.

β) $\overline{X}'_{N-1}=0$.

On continue la démonstration en utilisant la démarche présentée ci-dessous pour $\overline{X}_{N-1}=0$.

Deuxième cas : $\overline{X}_{N-1}=0$

Si $\overline{X}_{N-1}=0$, alors cela revient à dire que

$$\overline{XS}_{N-1}<u_{N-1}+\ldots+u_{N-n_N} \quad \Rightarrow \quad \overline{XS}_{N-2}<u_{N-2}+\ldots+u_{N-n_N},$$

puisque l'on a

$$0=\overline{X}_{N-1}=u_{N-1}+\overline{XS}_{N-2}-\overline{XS}_{N-1}.$$

On recommence alors le raisonnement qui vient d'être fait ci-dessus, selon que $\overline{X}_{N-2}$ est nul ou non.

En itérant cette démarche :

– ou bien on arrive à une étape pour laquelle on démontre, comme dans le premier cas ci-dessus, que la solution optimale n'était en fait pas la meilleure, ce qui est absurde;

– ou bien on arrive sans conclure au cas limite où un optimum a été construit pour lequel

$$\overline{XS}_{N-n_N}<u_{N-n_N},$$

Mais pour arriver à ce cas limite, il a fallu, par construction, que l'on ait

$$\overline{X}_{N-j}=0 \quad \text{pour tout } j=1, \ldots, n_N-1.$$

Alors on peut construire une solution admissible $\overline{X}'$ telle que

$$\overline{XS}'_{N-j}=\overline{XS}_{N-j}+\varepsilon; \quad j=1, \ldots, n_N,$$
$$\overline{X}'_N=\overline{X}_N+\varepsilon,$$
$$\overline{X}'_{N-n_N}=\overline{X}'_{N-n_N}-\varepsilon,$$

avec $\varepsilon=u_{N-n_N}-\overline{XS}_{N-n_N}$, les autres variables restant inchangées.

Le critère associé à cette solution $\overline{X}'$ est alors :

$$\overline{C}'=\overline{C}+\varepsilon\,(C'_{N-n_N}+\ldots+C'_{N-1}+C_N-C_{N-n_N}),$$
$$\overline{C}'=\overline{C}+\Delta,$$

si $\Delta>0$ [c'est-à-dire $(\varepsilon\neq 0)$ et $(C'_{N-n_N}+\ldots-C_{N-n_N})\neq 0$], alors on a contradiction avec l'hypothèse d'optimalité.

Si $\Delta=0$ alors on a fabriqué un optimum où par construction

$$\overline{XS}'_{N-1}+u_N=v_N.$$

C.Q.F.D.

En effet, on a

$$\overline{XS}'_{N-n_N} = u_{N-n_N},$$

$$\overline{XS}'_{N-n_N+1} = u_{N-n_N+1} + \overline{XS}'_{N-n_N} - \overline{X}'_{N-n_N+1}$$

et comme

$$\overline{X}'_{N-n_N+1} = \overline{X}_{N-n_N+1} = 0,$$

on a

$$\overline{XS}'_{N-n_N+1} = u_{N-n_N+1} + u_{N-n_N},$$

etc.

$$\overline{XS}'_{N-j} = u_{N-j} + \ldots + u_{N-n_N}; \qquad j = 1, \ldots, n_N,$$

$$u_N + \overline{XS}'_{N-1} = u_N + u_{N-1} + \ldots + u_{N-n_N} = v_N.$$