

C. BERGE

Problèmes plaisans et délectables

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 2, n° V3 (1968), p. 91-92.

http://www.numdam.org/item?id=RO_1968__2_3_91_0

© AFCET, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Problèmes Plaisans et Délectables

Problème 43. Un échiquier 6×6 est recouvert de pièces de dominos de 2×1 . Démontrer qu'il se laisse toujours découper d'une ligne verticale ou horizontale sans traverser aucun domino !

Problème 43 bis. Un cube $20 \times 20 \times 20$ est construit avec des briques parallélépipédiques de dimension $1 \times 2 \times 2$. Démontrer qu'on peut le transpercer de part en part avec une aiguille sans traverser aucune des briques !

Nous devons ce problème, qui est inédit, à l'obligeance de son auteur, le professeur J. Mycielski.

Solution du n° 41 : Le problème des jetons noirs et des jetons blancs.

n jetons, alternativement noirs et blancs, sont alignés sans intervalles. A chaque coup, on prend deux jetons consécutifs et on les place sur deux places vides adjacentes ; quel est le nombre minimum de coups $h(n)$ pour obtenir une séquence de jetons noirs et une séquence de jetons blancs réunis ?

Ce problème a été posé par Tait pour $n = 8$ (Introductory address to the Edinburgh Math. Soc., 9 nov. 1885), et une solution générale pour n pair, conduisant à $h(2p) = p$, paraît due à Delannoy (cf. Lucas, Récréations mathématiques, Paris 1892, t. 3, pp. 145-151).

En dépouillant le courrier de nos lecteurs, il apparaît qu'il y a plus de solutions que nous le supposions. Par exemple, pour le cas $n = 5$, on trouve trois solutions distinctes :

$A \ a \ B \ b \ C$	$A \ a \ B \ b \ C$	$A \ a \ B \ b \ C$
$A \ a \ .. \ C \ B \ b$	$A \ .. \ b \ C \ a \ B$	$A \ a \ B \ .. \ b \ C$
$A \ a \ C \ B \ .. \ b$	$A \ C \ a \ b \ .. \ B$	$.. \ B \ A \ a \ b \ C$
$.. \ C \ B \ A \ a \ b$	$a \ b \ A \ C \ B$	$.. \ .. \ a \ b \ C \ B \ A$

Ici, les lettres minuscules représentent les jetons blancs, et les lettres majuscules les jetons noirs.

Comme Lucas ne donnait qu'une méthode pour déterminer $h(n)$ quand n est pair, nous avons cru devoir faire appel à nos lecteurs pour comparer les différentes méthodes possibles.

Nous avons reçu des considérations intéressantes par M. P. de Nomazy, et aussi par M. Sbihi Abdelghani. Non, M. de Nomazy, $h(n)$ n'est pas une fonction croissante, puisque $h(3) = 1$ et $h(4) = 0$ (l'exception !).

M. Raymond Queneau envoie une méthode très générale pour $n \geq 5$, qui conduit à

$$h(2p - 1) = h(2p) = p,$$

... sauf pour $h(15)$.

Pour $h = 15, = (2 \times 8) - 1$, C. Witkowski donne entre autres la solution suivante en 8 mouvements :

<i>A</i>	<i>a</i>	<i>B</i>	<i>b</i>	<i>C</i>	<i>c</i>	<i>D</i>	<i>d</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>F</i>	<i>f</i>	<i>G</i>	<i>g</i>	<i>H</i>	
<i>A</i>	.	.	<i>b</i>	<i>C</i>	<i>c</i>	<i>D</i>	<i>d</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>F</i>	<i>f</i>	<i>G</i>	<i>g</i>	<i>H</i>	<i>a</i> <i>B</i>
<i>A</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>b</i>	<i>C</i>	<i>c</i>	<i>D</i>	<i>d</i>	.	.	<i>F</i>	<i>f</i>	<i>G</i>	<i>g</i>	<i>H</i>	<i>a</i> <i>B</i>
<i>A</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>b</i>	<i>C</i>	<i>c</i>	<i>D</i>	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>H</i>	<i>F</i>	<i>f</i>	<i>G</i>	.	.	<i>a</i> <i>B</i>
<i>A</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>b</i>	.	.	<i>D</i>	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>H</i>	<i>F</i>	<i>f</i>	<i>G</i>	<i>C</i>	<i>c</i>	<i>a</i> <i>B</i>
<i>A</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>G</i>	<i>D</i>	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>H</i>	<i>F</i>	.	.	<i>C</i>	<i>c</i>	<i>a</i> <i>B</i>
<i>A</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	.	.	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>H</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>c</i>	<i>a</i> <i>B</i>
<i>A</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>H</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	.	<i>B</i>
.	.	<i>e</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>H</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>E</i> <i>B</i>

En numérotant les jetons de 1 à n , les paires à déplacer sont les suivantes :

(2, 3) (9, 10) (14, 15) (5, 6) (12, 13) (6, 7) (15, 16) (1, 2)

Avec ces notations, et en désignant par m la partie entière de $n/4$, C. Witkowski suggère des méthodes conduisant à $h(2p - 1) = h(2p) = p$, et qu'il note de la façon suivante :

$n = 0 \pmod 4$ (2,3) — (5,6) — ($2m + 4, 2m + 5$) — ($2m - 1, 2m$) — ($2m + 8, 2m + 9$) — (9,10) ...

$n = 1 \pmod 4$ (2,3) — ($n, n + 1$) — ($n - 3, n - 2$) — ($2m - 1, 2m$) — ($n - 7, n - 6$) ...

$n = 2 \pmod 4$ (2,3) — ($2m + 3, 2m + 4$) — ($2m, 2m + 1$) — ($4m - 1, 4m$) — ($2m - 4, 2m - 3$) — ($4m - 5, 4m - 4$) ...

$n = 3 \pmod 4$ (2,3) — ($2m + 3, 2m + 4$) — ($2m + 6, 2m + 7$) — (5,6) — ($2m + 10, 2m + 11$) ...

Nous nous bornerons à montrer ici que toute méthode qui conduit à

$$h(2p) = h(2p - 1) = p \quad \text{est la meilleure possible.}$$

Appelons « rencontre » un couple de jetons adjacents de même couleur, c'est-à-dire un couple de deux lettres adjacentes, toutes deux majuscules ou toutes deux minuscules. Au départ, le nombre de rencontres est 0, et à la fin, le nombre de rencontres est $n - 2$; si l'on peut créer ces $n - 2$ rencontres en k mouvements, et si t_i désigne le nombre de rencontres créées au i -ème mouvement, on a

$$\begin{aligned} t_1 &\leq 1 \\ t_2 &\leq 2 \\ &\dots \\ t_{k-2} &\leq 2 \\ t_{k-1} + t_k &\leq 3. \end{aligned}$$

Donc, en additionnant membre à membre :

$$n - 2 \leq 1 + 3 + 2(k - 3)$$

ou

$$k \geq \frac{n}{2}$$

si $n = 2p$, comme si $n = 2p - 1$, on a donc bien $k \geq p$.

C. BERGE