

CLAUDE-ALAIN BURDET

**Deux modèles de minimisation d'une fonction  
économique concave**

*Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche  
opérationnelle. Recherche opérationnelle*, tome 4, n° V1 (1970),  
p. 49-84.

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1970\\_\\_4\\_1\\_49\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1970__4_1_49_0)

© AFCET, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## DEUX MODELES DE MINIMISATION D'UNE FONCTION ECONOMIQUE CONCAVE

par Claude-Alain BURDET

Institut de Recherche Opérationnelle ETH Zürich

---

Résumé. — *Le problème de la détermination d'un minimum global pour une fonction économique concave se heurte à des difficultés pratiques souvent insurmontables. D'un autre côté, la réalité économique conduit fréquemment à des modèles de ce type.*

*Deux modèles particuliers d'ordonnancement à fonction objective concave sont présentés ainsi qu'une méthode constructive de résolution. Celle-ci se base sur la possibilité de réduire le problème initial en une suite de problèmes de transport linéaires. Plusieurs méthodes énumératives peuvent alors être considérées pour l'obtention de l'optimum global (ou d'une bonne solution) des modèles concaves.*

### INTRODUCTION

Dans la réalité du monde économique, la planification ou rationalisation d'un système est souvent liée à la minimisation de fonctions-coûts parasites. Ces fonctions sont le résultat de l'interaction complexe des coûts engendrés par les facteurs de production, distribution, stockage, etc... Afin de permettre aux modèles mathématiques envisagés dans cette étude de tenir compte de la loi des coûts marginaux décroissants pour des systèmes de capacités croissantes, on suppose ici que la *fonction économique* (objective) à rendre minimale est une fonction *concave*, en principe quelconque (c'est-à-dire non-séparable par exemple). Cette étude porte donc sur les problèmes posés par la minimisation d'une fonction concave définie sur un polyèdre convexe.

Dans la première partie, on analyse un modèle appelé général, ses propriétés ainsi qu'un principe de solution qui sera illustré plus en détail par un algorithme présenté dans [S11].

Dans la seconde partie, le problème dit d'ordonnancement simple (simple allocation problem) est présenté sous forme de deux modèles M1 et M2 ; trois propositions sont établies, montrant comment la solution

de ces modèles peut être ramenée à une suite de problèmes linéaires de transport d'une forme particulière.

La troisième partie se consacre à la présentation schématique des méthodes pratiques utilisées pour la solution du problème d'ordonnement simple à fonction économique concave. Il s'agit essentiellement de méthodes énumératives spécialement adaptées aux modèles M1 et M2. Ces méthodes sont présentées séparément, mais leur construction a été faite en vue de leur mariage en une méthode combinée. Pour les méthodes d'énumération partielle (implicite), trois idées ont été retenues dans les critères d'énumération par bornes inférieures :

- bornes déterministes fournissant l'*optimum global*,
- bornes déterministes majorées (afin d'obtenir rapidement une *bonne* solution),
- bornes aléatoires avec seuil de confiance permettant d'établir un *optimum probable* pour des systèmes de grande taille.

Enfin quelques remarques concernant la conduite pratique des calculs sont esquissées, avec les résultats des expériences numériques, sous forme de conclusions.

## I. LES MODELES

### § 1. Le modèle mathématique général et ses propriétés

Avant d'analyser en détail le problème d'ordonnement simple à fonction économique concave, qui est décrit dans ce qui suit à l'aide des deux modèles M1 et M2, nous voulons traiter ici la question d'une fonction économique concave dans un cadre plus général.

On considère un polyèdre convexe  $C$  dans un espace vectoriel à  $n$  dimensions  $E^n$ .

Soit en outre une application linéaire  $\mathcal{L}$  définie dans  $E^n$  par la relation

$$y_i = \sum_{j=1}^n l_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m \leq n.$$

où  $x_j$  désigne les coordonnées d'un point quelconque  $x \in E^n$ , et  $y_i$  les coordonnées de l'image  $y \in E^m$  de  $x$  par  $\mathcal{L} : y = \mathcal{L}(x)$ .

Puisque l'application  $\mathcal{L}$  est linéaire et que  $m \leq n$ , les images  $\{y = \mathcal{L}(x) \mid x \in C\}$  forment également un polyèdre convexe  $D$  et l'on a

$$E^n \supset C \xrightarrow{\mathcal{L}} D = \mathcal{L}(C) \subset E^m.$$

Dans ce qui suit nous n'envisagerons donc que des domaines de définition  $C$  et  $D$  bornés.

Soit maintenant la *fonction économique*  $Z$  définie sur  $D$  (ou sur  $E^m$ )

$$Z = F(y_1, y_2, \dots, y_m) = \min!$$

Le problème d'optimisation consiste alors à déterminer un (év. plusieurs ou tous les points) point  $y^0 \in D$  qui rende  $Z$  minimale

$$Z(y^0) \leq Z(y), \quad \forall y \in D.$$

La nature (et la difficulté) de ce problème dépend essentiellement de la « forme » de la fonction à  $m$  variables  $F$  ; si  $F$  est linéaire, on parle d'un problème de programmation linéaire, et si  $F$  est (non-linéaire) convexe on a un problème de programmation non-linéaire (convexe) à restrictions linéaires.

Dans ces deux cas le problème d'optimisation possède la propriété suivante :  $y^0$  est optimale si et seulement si il existe un voisinage  $U(y^0) \subset D$  tel que

$$Z(y^0) \leq Z(y), \quad \forall y \in U(y^0) ;$$

en d'autres termes, la condition nécessaire et *suffisante* d'optimalité globale pour  $y^0$ , est que  $y^0$  soit un optimum local. Cette propriété mène immédiatement au principe de solution par améliorations successives (méthode du gradient, ou du simplex) pour ce type de problème.

Dans la pratique, cependant, il est fréquent de rencontrer des problèmes d'optimisation qui ne possèdent pas cette propriété et tels que leur approximation par un modèle linéaire (ou convexe) ne reflète pas du tout la réalité. Ceci est le cas, en particulier ici, si nous supposons que la fonction  $F$  est *concave* dans  $D$  c'est-à-dire que pour deux points quelconques  $y^1$  et  $y^2$  dans  $D$  et pour toute valeur du paramètre  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) on a :

$$F(\lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2) \geq \lambda F(y^1) + (1 - \lambda)F(y^2). \quad (1)$$

(Remarquons que, puisque  $D$  est convexe,  $y^3 = (\lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2) \in D$ , de sorte que le membre de gauche  $F(y^3)$  est bien défini.)

Nous supposons en outre que  $F$  reste bornée dans  $D$  ; il s'ensuit que  $F$  est continue à l'intérieur de  $D$  et ne peut admettre de discontinuités que sur le bord  $\partial D$ .

On a d'autre part :

$$F(y) = F(\mathcal{L}(x)) = f(x), \quad \forall x \in C,$$

et l'inégalité (1) implique donc que  $f$  est une fonction concave sur  $C \subset E^n$ .

Pour toute justification de cette hypothèse de concavité qui est à la base de cette étude, mentionnons simplement que, dans la réalité, les fonctions-coûts sont généralement concaves et doivent être rendues minimales ; un tel modèle général n'est donc pas une vue de l'esprit et correspond bien à une nécessité de la recherche opérationnelle [S1].

La distinction entre les problèmes d'optimisation A et B

$$A \left\{ \begin{array}{l} Z = F(y) = \min ! \\ y \in D, \text{ avec } D = \mathcal{L}(C), \end{array} \right.$$

et

$$B \left\{ \begin{array}{l} Z = f(x) = \min ! \\ x \in C \end{array} \right.$$

peut, au premier abord, paraître arbitraire voire inutile, mais nous verrons par la suite, qu'aussi bien du point de vue pratique que théorique, l'application linéaire  $\mathcal{L}$  joue un rôle important et justifie pleinement le modèle A.

## § 2. Méthode de solution

On a vu au paragraphe précédent que la concavité de la fonction  $F$  ne permet pas l'application du principe de solution par amélioration successive, car le problème a, en général, une *multitude d'optima locaux*. Comme dans le cas où  $F$  est linéaire, il est cependant possible d'identifier un ensemble fini  $\Lambda$  de points du polyèdre  $C$  parmi lesquels se trouve l'optimum global. La proposition suivante montre que  $\Lambda$  est constitué par les sommets de  $D = \mathcal{L}(C)$ .

### Proposition 1

Parmi les solutions optimales  $x_{\text{opt}}$  minimalisant la fonction objective  $Z$

$$Z = F(y_1, y_2, \dots, y_m) = \min! \quad (F \text{ concave})$$

avec

$$\mathcal{L} : y_i = \sum_{j=1}^n l_{ij} x_j, \quad \forall i \in M = \{1, 2, \dots, m\} \quad m \leq n$$

et sous condition  $x \in C \subset E^n$ , il se trouve un sommet  $x^0$  de  $C$  tel que  $y^0 = \mathcal{L}(x^0)$  soit un sommet de  $D = \mathcal{L}(C) \subset E^m$ .

### Démonstration

La proposition 1 n'est qu'une application au modèle du § 1. d'une propriété fondamentale des fonctions concaves énoncée ici sous forme de,

**Lemme.** — Une fonction concave  $f$  définie sur un polyèdre convexe (borné)  $P$  admet son minimum global en un des sommets de  $P$ , c'est-à-dire  $\exists \bar{x} = \text{sommet de } P$ , tel que  $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in P$ .

La démonstration de ce lemme n'est pas présentée ici et peut être retrouvée dans [S12].

On sait que  $F(y)$  est concave sur  $D$  et que  $f(x) = F(\mathcal{L}(x))$  est concave sur  $C$ ; de plus les sommets de  $D$  sont images par  $\mathcal{L}$  de sommets de  $C$ , ce qui établit la proposition 1 en appliquant le lemme.

Dans ce qui suit on admettra toujours que  $m \leq n$  et, dans le cas général, le polyèdre  $C$  a donc beaucoup plus de sommets que  $D$ ; et la proposition 1 permet donc de limiter considérablement l'ensemble  $\Lambda$  de candidats pour l'optimum ce qui allège la recherche de cet optimum.

Sans préciser la fonction concave  $F$ , on peut donc esquisser une méthode de résolution pour le problème d'optimisation :

$$Z = F(y_1, y_2, \dots, y_m) = \min!$$

avec

$$y_i = \sum_j l_{ij} x_j, \quad \forall i \in M$$

sous condition  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C \subset E^n$ .

### Méthode

1) Déterminer successivement tous les sommets du polyèdre  $C$  c'est-à-dire tous les points  $\bar{x} \in C$  pour lesquels il existe un vecteur  $\bar{d} = (\bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_n)$  tel que

$$\sum_{j=1}^n \bar{d}_j \bar{x}_j > \sum_{j=1}^n \bar{d}_j x_j, \quad \forall x \neq \bar{x} \in C$$

2) évaluer la fonction objective  $Z$  en chacun de ces sommets,

3) conserver la (ou les) meilleure solution.

Il est évident que le point délicat de cette méthode se trouve dans 1); comme on vient de le voir une première simplification est obtenue en ne considérant que des vecteurs  $\bar{d}$  dont les composantes sont de la forme :

$$\bar{d}_j = \sum_{i=1}^m d_i l_{ij}, \quad \forall j \in N$$

afin d'identifier les sommets du polyèdre  $D$ , au lieu de considérer tous les sommets de  $C$ .

Sous cette forme générale, le problème d'optimisation peut être résolu par la méthode du simplex (appliquée au polyèdre  $C$ ) à l'aide d'un algorithme présenté dans [S11]. Nous allons consacrer le reste de ce travail à l'étude de polyèdres particuliers appelés polytomiques en établissant une méthode qui permet d'alléger considérablement les calculs pour une classe de problèmes d'optimisation classiques de la recherche opérationnelle appelés problèmes d'ordonnancement simple (simple allocation problems).

### § 3. Le polyèdre polytomique $C$

L'expression « soit  $A$  soit  $B$  » peut s'écrire «  $x_A \cdot A + x_B \cdot B$  » avec  $x_A, x_B = 0,1$  et  $x_A + x_B = 1$ .

La généralisation à plusieurs « objets »  $A, B, C, \dots$  est immédiate

$$x_j = 0,1 \quad \forall j \in J$$

avec

$$\sum_{j \in J} x_j = 1$$

Une telle expression (polytomie) se rencontre fréquemment, dans la planification d'un système économique, pour le choix d'une alternative parmi plusieurs. En généralisant on peut considérer le polyèdre polytomique  $C \in E^n$  défini par

$$0 \leq x_j (\leq l_i) \quad \forall j \in N_i, \forall i \in M$$

$$\sum_{j \in N_i} x_j = l_i > 0 \quad \forall i \in M, \text{ ce qui entraîne } x_j \leq l_i,$$

avec

$$\bigcup_i N_i = N = \{1, 2, \dots, n\}$$

Cependant, nous ne considérons dès lors que le cas où

$$N_i = \{1, 2, \dots, \mu\} \quad \forall i \in M$$

donc avec  $n = m\mu$ . Cela ne limite pas la généralité du problème puisque l'on peut toujours choisir  $\mu = \max_{i \in M} n_i$ . Posons donc la définition suivante pour  $C \subset E^{nm}$ .

$$C : \begin{cases} 0 \leq x_{ij} (\leq l_j) & \forall i \in M, \forall j \in N \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = l_j > 0 & \forall j \in N, \text{ donc } x_{ij} \leq l_j. \end{cases}$$

Le polyèdre polytomique  $C$  a  $m^n$  sommets distincts que l'on obtient en choisissant arbitrairement  $i(j)$  pour chaque  $j \in N$  et posant  $\forall j$  :

$$x_{ij} = \begin{cases} = l_j & \text{si } i = i(j) \\ = 0 & \forall i \neq i(j) \end{cases}$$

Du point de vue pratique, l'exemple suivant donne une idée du genre de circonstances qui peuvent être caractérisées par  $C$ .

Une fabrique d'articles de mode confectionne des vêtements de  $n$  genres  $G_j$  différents ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Pour chaque  $j$ , la série de production comprend  $l_j$  articles du même genre  $G_j$ .

Chaque vêtement peut être confectionné en  $m$  tissus  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) de couleurs différentes.

$x_{ij}$  indique combien de pièces du genre  $G_j$  doivent être confectionnées avec le tissu  $T_i$  dans la solution  $x$ .

La condition  $x \in C$  exprime la nécessité de fabriquer toutes les  $l_j$  pièces de vêtements demandées pour chaque genre  $G_j$ .

Nous ne voulons pas poursuivre ici la description de cet exemple plus avant, mais il est intéressant de remarquer que, pour une application linéaire  $\mathfrak{L}$  et une fonction objective concave  $F$  quelconques, la proposition 1 indique déjà la structure de la solution optimale : en effet un sommet de  $C$  représente un programme de production où chacun des  $l_j$  articles du genre  $G_j$  est confectionné avec le même tissu  $T_{i(j)}$ , puisque  $x_{i(j)j} = l_j$ .

Les modèles M1 et M2 présentés dans les paragraphes suivants sont tous deux basés sur le polyèdre polytomique  $C$ . Du point de vue de l'algorithme de solution, on peut remarquer que la structure particulière du polyèdre  $C$  permet de déterminer directement, sans l'aide des vecteurs  $d$ , les sommets du polyèdre  $D = \mathfrak{L}(C)$ . On verra dans la proposition 2 que ceci s'obtient par l'intermédiaire d'une classification des sommets du polyèdre polytomique  $C$  (définie par un vecteur  $a$ ). L'avantage de cette approche provient du fait que les vecteurs  $a$  sont tous connus d'avance et sont en nombre fini (correspondant au nombre de sommets de  $D$ ) alors que les vecteurs  $d$  doivent être choisis de sommet en sommet parmi une infinité de possibilités.

#### § 4. Le modèle M1

On considère la fonction objective  $Z$

$$Z = F(y_0, y_1, y_2, \dots, y_m) = \min!$$

où la fonction  $F$  est concave et avec

$$D = \mathfrak{L}(C) : \begin{cases} y_0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ y_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}, & \forall i \in M = \{1, 2, \dots, m\} \end{cases}$$

et

$$C : \begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} = l_j \neq 0, & \forall j \in N = \{1, 2, \dots, n\} \\ x_{ij} \geq 0 & \forall i \in M, \forall j \in N \end{cases}$$

(on suppose en outre, sans restreindre la généralité du problème, que  $l_j > 0$  et  $c_{ij} \geq 0$ ) [S4].

Afin de donner à ce modèle M1 une illustration tirée d'un cas pratique, nous allons reprendre ici l'exemple d'une fabrique d'articles de mode. On aura alors :

$y_i, (i \in M)$  : Nombre de pièces confectionnées avec le tissu  $T_i$ , c'est-à-dire, en admettant que chaque modèle  $G_j$  nécessite la même quantité de tissu,  $y_i$  représente la quantité totale de tissu  $T_i$  nécessaire.



$c_{ij}$  : Quantité de fournitures supplémentaires (en francs par exemple) nécessaire à la confection d'un article du modèle  $G_j$  avec le tissu  $T_i$  ; ces fournitures supplémentaires comprendront par exemple :

- les heures de travail ;
- les frais de transport, stockage, entretien ;
- les frais dus aux machines utilisées...

$y_0$  : quantité globale de fournitures supplémentaires c'est-à-dire en un mot : l'ensemble des causes des frais d'exploitation.

La fonction objective  $Z$  correspondra alors aux frais totaux entraînés par la confection de  $l_j$  pièces du genre  $G_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Le problème revient donc à déterminer pour chaque genre  $G_j$ , le (ou les) tissu  $T_{i(j)}$  qui permet le programme de confection le plus économique.

Quant à l'hypothèse de concavité de la fonction  $F$ , elle peut s'expliquer par les motifs suivants par exemple :

*Propriétés individuelles pour chaque  $y_i$  ( $i \neq 0$ ) :*

- Rabais en fonction de la quantité totale de tissu  $T_i$  achetée (le prix au mètre diminue avec le nombre de mètres achetés).
- Diminution des chutes de tissu et pertes de temps en fonction de la quantité de tissu (de même sorte) travaillée.
- Frais spécifiques de transport et d'emballage qui sont moindres pour une grande quantité de tissu.

*Propriétés communes à plusieurs  $y_i$  ( $i \neq 0$ ) : ( $F$  non séparable)*

- Rabais accordés par une fabrique fournissant simultanément plusieurs sortes de tissus.
- Interdépendance des tissus due à leur couleur, ou épaisseur ou style semblables.
- Interactions entre tissu et fournitures supplémentaires (stockage, commandes, manutention, couleurs, personnel spécialisé...).

Nous avons énuméré ici quelques points relatifs à une fabrique d'article de mode, mais il est bien évident que pour d'autres industries le même genre de problème intervient également. De tels exemples seront repris plus loin.

D'une manière générale, on a intérêt, au vu de la méthode de résolution présentée ici, à faire intervenir tous les facteurs dans le calcul des frais de production ; en effet, la complexité de la fonction objective ne joue pas ici un rôle primordial dans les temps de calcul qu'entraîne la résolution du problème.

Le modèle réduit  $\overline{M1}$  :

Pour trouver la solution du modèle M1, on construit un modèle « équivalent » appelé modèle réduit  $\overline{M1}(a)$  dont il est aisé de déterminer les deux solutions :

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{x}_{ij} &= \begin{cases} \max ! \\ \min ! \end{cases} \\ \text{sous conditions } \bar{x}_{ij} &\geq 0 \quad \forall i, \forall j \\ \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} &= 1, \quad \forall j \in N \\ \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} &= a_i, \quad \forall i \in M. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \overline{M1}(a) \text{ où les } a_i \\ \text{sont des paramètres connus} \\ \forall i \in M. \end{array}$$

Par définition, on a donc un modèle réduit  $\overline{M1}$  différent pour chaque vecteur  $a$  distinct, satisfaisant la relation

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = n$$

avec  $a_i \equiv 0 \pmod{1}$ .

Le terme « équivalent » doit être compris dans le sens large exprimé par la proposition suivante.

### Proposition 2

A chaque vecteur  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  tel que

$$\sum_{i=1}^m a_i = n, \quad \text{et} \quad a_i \equiv 0 \pmod{1}, \quad \forall i \in M$$

correspond une paire de sommets (en général distincts) du polyèdre  $D$ . Ces sommets sont les images  $y$  des solutions  $\bar{x}_{\max}$  et  $\bar{x}_{\min}$  du modèle  $\overline{M1}(a)$ , définies par :

$$y_0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n l_j c_{ij} \bar{x}_{ij}, \quad y_i = \sum_{j=1}^n l_j \bar{x}_{ij}, \quad \forall i \in M$$

Et inversement, à chaque sommet de  $D$  correspond un vecteur  $a$ .

### Démonstration

Puisque  $l_j \neq 0, \forall j$  on peut réduire le polyèdre polytomique

$$C = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^m x_{ij} = l_j, x_{ij} \geq 0 \right\}$$

et le transformer en un polyèdre  $\bar{C}$  obtenu en divisant par  $l_j$

$$\bar{C} = \left\{ \bar{x} \mid \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = 1, \bar{x}_{ij} \geq 0 \right\}$$

et l'on aura

$$C = \{ x \mid x_{ij} = l_j \bar{x}_{ij}, \quad \forall i \in M, \forall j \in N, \bar{x} \in \bar{C} \}$$

Considérons maintenant un vecteur  $d = (d, d_2, \dots, d_m)$  quelconque, en se souvenant que  $d$  est simplement un moyen permettant de considérer un sommet de  $D$  à l'aide de la fonction objective auxiliaire  $z$

$$z = \sum_{i=1}^m d_i y_i = \max !$$

sous condition :  $y \in D$ , c'est-à-dire

$$z = \sum_{i=1}^m d_i \sum_{j=1}^n l_j \bar{x}_{ij} + d_0 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n l_j c_{ij} \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^n l_j \sum_{i=1}^m (d_i + d_0 c_{ij}) \bar{x}_{ij} = \max !$$

Cependant, en vertu de  $\sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = 1$  et  $l_j > 0$  pour chaque  $j \in N$ , on peut trouver immédiatement la solution optimale de ce problème auxiliaire en posant

$\forall j \in N :$

$$\bar{x}_{ij}^{opt} = \begin{cases} = 1 & \text{pour } i = i(j) \\ = 0 & i \neq i(j) \end{cases}$$

où  $i(j)$  est choisi tel que l'inégalité

$$d_{i(j)} + d_0 c_{i(j)j} \geq d_v + d_0 c_{vj}$$

soit vérifiée  $\forall v \in M$ .

Ayant ainsi déterminé le sommet  $x^{opt}$ , posons

$$a_i = \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij}^{opt}, \quad \forall i \in M$$

et l'on remarque que  $\bar{x}^{opt}$  est la solution optimale du problème réduit suivant

$$\tilde{z} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (d_i + d_0 c_{ij}) \bar{x}_{ij} = \max !$$

sous condition (A) :

$$(A) \begin{cases} \bar{x}_{ij} \geq 0 \\ \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = 1, & \forall j \in N \\ \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = a_i, & \forall i \in M \end{cases}$$

Cependant on peut aussi écrire  $\tilde{z}$  sous la forme

$$\tilde{z} = \sum_{i=1}^m d_i \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} + d_0 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^m d_i a_i + d_0 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{x}_{ij} = \max !$$

Pour chaque vecteur  $a$  donné, le terme  $\sum_{i=1}^m d_i a_i$  ne dépend plus de  $\bar{x}_{ij}$  et n'entre donc plus en ligne de compte pour le calcul du maximum et seul reste le problème

$$d_0 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{x}_{ij} = \max !$$

avec les conditions :

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \\ \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = a_i \quad \forall i \in M \\ \bar{x}_{ij} \geq 0 \end{array} \right\} (A)$$

et en formant le vecteur  $d$  par  $|d_0| = 1$ ,

on obtient la fonction objective auxiliaire

$$\pm \sum_{ij} c_{ij} \bar{x}_{ij} = \max !$$

ou

$$\bar{Z} = \sum_{i,j} c_{ij} \bar{x}_{ij} = \begin{cases} \max ! \\ \min ! \end{cases}$$

La proposition 2 se démontre en remarquant que :

— d'une part on peut déterminer tous les sommets de  $D$  en résolvant tous les problèmes auxiliaires (c'est-à-dire pour tous les vecteurs  $d$ ) et que,

— d'autre part l'ensemble des solutions distinctes de ces problèmes auxiliaires est identique avec l'ensemble des solutions des modèles réduits  $\overline{M1}(a)$  pour tous les vecteurs  $a$ .

On a donc une correspondance bi-univoque entre les sommets du polyèdre  $D$  et les solutions  $\bar{x}_{\max}$  et  $\bar{x}_{\min}$  des problèmes réduits  $\overline{M1}(a)$ . q.e.d.

Ceci permet de faire les remarques suivantes quant à la résolution du modèle  $M1$  :

1) En considérant tous les vecteurs  $a$  possibles tels que

$$\sum_{i=1}^n a_i = n \text{ et } a_i \equiv 0 \pmod{1}, \quad \forall i \in M$$

le modèle réduit  $M1(a)$  livre les coordonnées  $y$  des sommets de  $D$ .

Il y a en tout et pour tout  $\binom{m+n-1}{m-1}$  vecteurs  $a$  distincts.

La table ci-dessous indique dans quelle mesure ce nombre se compare favorablement aux  $m^n$  solutions du modèle  $M1$ .

$$A = m^n; \quad B = \binom{m+n-1}{m-1}; \quad C = A/B$$

| $\begin{array}{c} n \\ \backslash \\ m \end{array}$ | 5                                                                  | 10                                                                          | 20                                                                             | 50                                                                                |
|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 2 $\begin{array}{l} A = \\ B = \\ C = \end{array}$  | $\begin{array}{l} 32 \\ 6 \\ 5,33 \end{array}$                     | $\begin{array}{l} 1,02 * 10^3 \\ 11 \\ 93,09 \end{array}$                   | $\begin{array}{l} 1,05 * 10^6 \\ 21 \\ 4,99 * 10^4 \end{array}$                | $\begin{array}{l} 1,13 * 10^{15} \\ 51 \\ 2,21 * 10^{13} \end{array}$             |
| 3 $\begin{array}{l} A = \\ B = \\ C = \end{array}$  | $\begin{array}{l} 243 \\ 21 \\ 11,57 \end{array}$                  | $\begin{array}{l} 5,90 * 10^4 \\ 66 \\ 8,94 * 10^2 \end{array}$             | $\begin{array}{l} 3,49 * 10^9 \\ 231 \\ 1,51 * 10^7 \end{array}$               | $\begin{array}{l} 7,18 * 10^{23} \\ 1,33 * 10^3 \\ 5,41 * 10^{20} \end{array}$    |
| 4 $\begin{array}{l} A = \\ B = \\ C = \end{array}$  | $\begin{array}{l} 1,02 * 10^3 \\ 56 \\ 18,28 \end{array}$          | $\begin{array}{l} 1,05 * 10^6 \\ 286 \\ 3,67 * 10^3 \end{array}$            | $\begin{array}{l} 1,10 * 10^{12} \\ 1,77 * 10^3 \\ 6,21 * 10^8 \end{array}$    | $\begin{array}{l} 1,27 * 10^{30} \\ 2,34 * 10^4 \\ 5,41 * 10^{25} \end{array}$    |
| 5 $\begin{array}{l} A = \\ B = \\ C = \end{array}$  | $\begin{array}{l} 3,12 * 10^3 \\ 126 \\ 24,80 \end{array}$         | $\begin{array}{l} 9,77 * 10^6 \\ 1,00 * 10^3 \\ 9,76 * 10^3 \end{array}$    | $\begin{array}{l} 9,54 * 10^{13} \\ 1,06 * 10^4 \\ 8,97 * 10^9 \end{array}$    | $\begin{array}{l} 8,88 * 10^{34} \\ 3,16 * 10^5 \\ 2,81 * 10^{29} \end{array}$    |
| 10 $\begin{array}{l} A = \\ B = \\ C = \end{array}$ | $\begin{array}{l} 1,00 * 10^5 \\ 2,00 * 10^3 \\ 50,00 \end{array}$ | $\begin{array}{l} 1,00 * 10^{10} \\ 9,24 * 10^4 \\ 1,08 * 10^5 \end{array}$ | $\begin{array}{l} 1,00 * 10^{20} \\ 1,00 * 10^7 \\ 9,99 * 10^{12} \end{array}$ | $\begin{array}{l} 1,00 * 10^{50} \\ 1,26 * 10^{10} \\ 7,96 * 10^{39} \end{array}$ |

2) Le problème réduit  $\overline{M1}$  est un problème classique d'optimisation mathématique *linéaire*; il s'agit en fait d'un problème dit de transport, sous une forme simplifiée. La simplification réside dans le fait que dans la condition

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \text{ on a } b_j = 1, \quad \forall j \in N.$$

On verra d'autre part qu'il n'est pas nécessaire de résoudre un problème de transport complet pour chaque sommet, mais qu'en général quelques itérations suffisent, car on dispose pour chaque problème d'une bonne solution approchée.

3) Enfin il convient aussi de mentionner la proposition suivante, qui permet souvent de réduire de moitié le nombre des calculs.

### Proposition 3

Soit  $F$  une fonction *concave monotone croissante* [*décroissante*] en son argument  $y_0$ , c'est-à-dire :

$\forall y \in D$  tels que  $y_0 \geq \tilde{y}_0$  on a par hypothèse

$$F(y_0, y_1, \dots, y_m) [\geq] F(\tilde{y}_0, y_1, y_2, \dots, y_m)$$

Il suffit alors, pour déterminer la solution du modèle M1, de trouver la solution  $\bar{x}_{\min}$  [ $\bar{x}_{\max}$ ] du modèle réduit  $\overline{M1}(a)$  pour chaque vecteur  $a$ . Pour une fonction monotone croissante, par exemple, on ne calculera donc que  $\bar{x}_{\min}$ . La démonstration n'est pas présentée ici et se trouve dans [S12].

## § 5. Le modèle M2

Sur la base de l'idée développée au § 4. pour l'obtention des sommets de l'enveloppe convexe  $D$ , on peut résoudre plusieurs modèles ; M1 et M2 sont des exemples types qui ont été choisis ici à cause de leurs nombreuses applications.

On considère la fonction objective  $Z$

$$Z = F(y_1, y_2, \dots, y_m) = \min!$$

où la fonction  $F$  est concave, avec les conditions

$$D = \mathcal{L}(C) : y_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad \forall i \in M = \{1, 2, \dots, m\}$$

et

$$C : \begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} = l_j \neq 0, & \forall j \in N = \{1, 2, \dots, n\} \\ x_{ij} \geq 0, & \forall i \in M, \forall j \in N \end{cases}$$

(on suppose en outre que  $l_j > 0$  et  $c_{ij} > 0$ ).

Comme pour le modèle M1, il est aisé d'imaginer un exemple pratique conduisant à ce modèle M2 ; nous nous contenterons donc d'une illustration sommaire qui est l'adaptation au modèle M2 de l'exemple précédent :

$y_i$  : quantité totale de tissu  $T_i$  utilisé.

$c_{ij}$  : quantité de tissu  $T_i$  nécessaire pour la confection d'un article du genre  $G_j$ .

$Z$  représente les frais de productions dus à l'acquisition et manufacture de l'ensemble des tissus (voir aussi [S1] et [S2]).

Du point de vue mathématique, il s'avère que l'on peut ramener le cas  $M2$  au précédent, à l'aide de la :

**Proposition 4**

A chaque vecteur  $a = (a_1, \dots, a_m)$  tel que

$$\sum_{i=1}^m a_i = n \text{ et } a_i \equiv 0 \pmod{1}, \quad \forall i \in M$$

correspond une paire de sommets du polyèdre  $D$ . Ces sommets sont les images  $y$  des solutions  $\bar{x}_{\max}$  et  $\bar{x}_{\min}$  du modèle réduit  $\overline{M2}(a)$  :

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \bar{x}_{ij} = \begin{cases} \max ! \\ \min ! \end{cases} \\ &\text{avec } \gamma_{ij} = \log c_{ij} \\ \text{sous conditions} \\ \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} &= 1, \forall j \in N \\ \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} &= a_i, \forall i \in M \end{aligned} \right\} \overline{M2}(a)$$

et pour les images  $y$  on a :

$$y_i = \sum_{j=1}^n l_j c_{ij} \bar{x}_{ij}^{opt}, \quad \forall i \in M$$

où  $\bar{x}^{opt}$  est une solution optimale de  $\overline{M2}(a)$ .

Avant de démontrer cette proposition, remarquons que les modèles réduits  $\overline{M2}$  et  $\overline{M1}$  sont identiques à la différence près que le modèle  $\overline{M2}$  ne fait pas directement usage des coefficients  $c_{ij}$  mais utilise  $\gamma_{ij}$  ( $= \log c_{ij}$ , la base du log ne jouant pas de rôle, comme on va le voir dans la démonstration suivante).

*Démonstration* : On montre tout d'abord que l'on peut, sans restriction de la généralité supposer  $\gamma_{ij} \geq 0$ . En effet puisqu'on a supposé  $c_{ij} > 0$ , les quantités  $\gamma_{ij} = \log c_{ij}$  sont bien définies ; en outre

$$\sum_{i,j} (\gamma_{ij} + \alpha) \bar{x}_{ij} = \alpha \sum_{i,j} \bar{x}_{ij} + \sum_{i,j} \gamma_{ij} \bar{x}_{ij} = \alpha \cdot n + \bar{Z} :$$

on peut donc supposer sans restriction de généralité que  $\gamma_{ij} \geq 0$ , car cela peut toujours être obtenu en ajoutant aux  $\gamma_{ij}$  un  $\alpha > 0$  suffisamment

grand, sans modifier la solution du problème, seule la valeur de l'optimum étant modifiée par la constante  $\alpha \cdot n$ .

En utilisant le même polyèdre  $\bar{C}$  que dans la proposition 2, la fonction objective auxiliaire  $z$  qui permet de déterminer un sommet de  $D$ , s'écrira

$$z = \sum_{i=1}^m d_i y_i = \max !$$

avec  $y \in D$

ou

$$z = \sum_{i=1}^m d_i \sum_{j=1}^n l_j c_{ij} \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^n l_j \sum_{i=1}^m d_i c_{ij} \bar{x}_{ij} = \max !$$

Comme pour le cas M1, la solution optimale du problème auxiliaire est immédiate :  $\forall j \in N$ , on pose

$$x_{ij}^{opt} = \begin{cases} = 1 & \text{pour } i = i(j) \\ = 0 & \forall i \neq i(j) \end{cases}$$

où  $i(j)$  est choisi tel que l'inégalité

$$d_{i(j)} c_{i(j)j} \geq d_v c_{vj}, \quad \forall v \in M \quad (4)$$

soit vérifiée  $\forall v \in M$ . Il est important de noter ici que tous les  $d_{i(j)}$  de la solution optimale sont

- soit tous positifs :  $d_{i(j)} > 0, \forall j \in N$
- soit tous négatifs :  $d_{i(j)} < 0, \forall j \in N$ .

En effet c'est là une conséquence du choix de l'indice  $i(j)$  satisfaisant l'inégalité (4) ci-dessus.

Sans restriction de généralité, nous ne considérons donc dès lors que des vecteurs  $d$  avec  $d_i > 0, \forall i \in M$ , et une fonction objective auxiliaire du type

$$z = \sum_{i=1}^m d_i y_i = \begin{cases} \max ! \\ \min ! \end{cases}$$

avec  $y \in D$ .

Il est maintenant possible de définir les quantités

$$\delta_i = \log d_i$$

$$\gamma_{ij} = \log c_{ij}$$

puisque tous les  $d_i$  et  $c_{ij}$  envisagés sont positifs.

On aura donc

$$\delta_i + \gamma_{ij} = \log (d_i c_{ij}), \quad \forall i, \forall j$$



et la propriété de monotonie (croissante) au sens stricte de la fonction logarithmique permet l'équivalence  $\forall j \in N$  :

$$\begin{aligned} \delta_{i(j)} + \gamma_{i(j)j} & (\geq) \delta_v + \gamma_{vj}, & \forall v \in M \\ & \Updownarrow \\ d_{i(j)} c_{i(j)j} & (\geq) d_v c_{vj}, & \forall v \in M \end{aligned}$$

On peut donc définir un deuxième problème auxiliaire en remplaçant la fonction objective auxiliaire  $z$  par  $\tilde{z}$

$$\tilde{z} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (\delta_i + \gamma_{ij}) \bar{x}_{ij} = \begin{cases} \max ! \\ \min ! \end{cases}$$

possédant les mêmes solutions optimales. On peut maintenant appliquer le même raisonnement que pour la proposition 2, ce qui termine la démonstration de la proposition 4.

L'étroite similitude résidant entre les modèles M1 et M2, et que la proposition 4 met à jour, suscite les deux remarques suivantes :

1) les polyèdres  $D$  des modèles M1 et M2 ont (dans le cas général) le même nombre de sommets (au plus  $2 \binom{m+n-1}{m-1}$ ). Ces deux modèles possèdent la même classe de candidats (optima locaux) à l'optimum global.

2) Soit la fonction  $F$  monotone croissante [décroissante] en tous ses arguments  $y_i$ , c'est-à-dire :

$\forall y$  et  $\forall \tilde{y} \in D$  et  $i_0$  quelconque  $\in M$ , tels que  $y_i = \tilde{y}_i, \quad \forall i \in M - \{i_0\}$ ,  
on a, pour  $y_{i_0} \geq \tilde{y}_{i_0}$ .

$$\begin{aligned} F(\tilde{y}) & \geq F(y) \\ & [\leq] \end{aligned}$$

Dans ce cas, il suffit de considérer la fonction objective  $\tilde{Z} = \min!$  [max!] dans le modèle réduit  $\overline{M2}(a)$ , ce qui réduit de moitié l'ensemble des candidats à l'optimum.

## II. LES ALGORITHMES

On trouve dans les paragraphes 1 et 2 un modèle général et dans [S11], [S12] la description du principe permettant de déterminer sa solution optimale ; la méthode consiste en une suite de problèmes auxiliaires linéaires, chacun déterminant un candidat pour l'optimum global (= sommet du polyèdre  $D$  = optimum local) par l'intermédiaire d'un vecteur  $d$ . Le point faible d'un algorithme basé sur ce principe réside dans le choix des vecteurs  $d$  permettant de déterminer tous les candidats possibles (tous les sommets de  $D$ ). Et c'est précisément cette difficulté qui se

trouve éliminée par l'application des propositions 2 et 4, aux modèles-types M1 et M2.

Dans ces deux cas particuliers, le problème initial non-linéaire, concave, peut être alors résolu par une suite de problèmes auxiliaires *linéaires* (appelés modèles réduits) que l'on peut aisément engendrer à l'aide des vecteurs  $a$  dont la forme est connue à l'avance.

Si l'on ne désire pas faire intervenir l'expression mathématique particulière au problème de la fonction concave  $F$  (parce que celle-ci est trop compliquée, par exemple) dans les phrases intermédiaires du calcul de l'optimum global, cette méthode d'optimisation peut être considérée comme nécessitant un minimum de calculs. En effet l'ensemble  $K$  des candidats fournis par les solutions optimales des problèmes auxiliaires jouit de la propriété nécessaire et suffisante suivante :

— L'optimum global est un élément de  $K$ .

— A partir d'un élément quelconque de  $K$ , on peut toujours construire une fonction concave  $F$  telle que cet élément soit l'optimum global.

Donc, si la fonction  $F$  est quelconque mais concave (c'est-à-dire, si l'on ne spécifie pas  $F$ ), il faut et il suffit d'évaluer  $F$  pour chaque candidat de la classe  $K$ .

D'autre part, puisque cet ensemble  $K$  est indépendant de la fonction objective  $Z$ , on peut utiliser les mêmes candidats pour plusieurs fonctions objectives différentes, déterminant ainsi la sensibilité du modèle par une modification des paramètres de  $Z$ , par exemple.

De plus il existe des algorithmes efficaces pour la résolution des modèles réduits qui sont des problèmes de transport linéaires, ce qui conduit à des temps de calcul tolérables pour la solution par cette méthode des modèles M1 ou M2. Dans les paragraphes suivants, on va donc établir différents types d'algorithmes, tous basés sur l'ensemble  $K$  d'optima locaux.

## § 6. L'énumération totale

Qu'il s'agisse du modèle M1 ou de M2, on sait que les éléments de  $K$  sont engendrés par les vecteurs  $a \in A$  :

$$A = \left\{ a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \mid \begin{array}{l} a_i \equiv 0 \pmod{1}, \forall i \in M \\ \sum_{i=1}^m a_i = n \end{array} \right\}$$

Pour une méthode énumérative, il convient donc d'établir un *ordre chronologique* dans lequel les éléments de  $K$  (c'est-à-dire les vecteurs  $a \in A$ ) vont être engendrés. Le choix de cette relation d'ordre est importante car elle influe grandement sur les temps de calcul des programmes linéaires  $\overline{M1}(a)$  ou  $\overline{M2}(a)$  successifs. En effet il est essentiel que, dans l'ordre chronologique  $a^1, \dots, a^v, a^{v+1}, \dots, a^\omega$  des calculs, la solution optimale du problème auxiliaire  $\overline{M}(a^v)$  soit une bonne solution approchée pour  $\overline{M}(a^{v+1})$ ,  $\forall v = 1, \dots, \omega$  : si cet ordre est adéquat, on pourra en effet résoudre chaque

programme linéaire  $\overline{M}(a)$  en quelques itérations de l'algorithme de transport seulement (voir fig. 1).

On va donc engendrer les vecteurs  $a$  dans un ordre chronologique basé sur le concept de voisinage suivant :

« Deux vecteurs  $a^1$  et  $a^2$  sont dits *voisins* lorsque :

$$\begin{aligned} a_i^1 &= a_i^2 & \forall i \in M - \{i_1, i_2\} \\ (I) \quad \begin{cases} a_{i_1}^1 &= a_{i_1}^2 + 1 \\ a_{i_2}^1 &= a_{i_2}^2 - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(Manifestement les relations (I) respectent la condition  $\sum_{i=1}^m a_i = n$ ).

Le concept de voisinage ne définit cependant pas entièrement la relation d'ordre sur l'ensemble  $A$  ; toutefois il est clair qu'il existe sur  $A$  des relations d'ordre (chronologique) dans lesquelles chaque vecteur  $a$  est *voisin de son prédécesseur et de son suivant* (voir exemple ci-dessous).

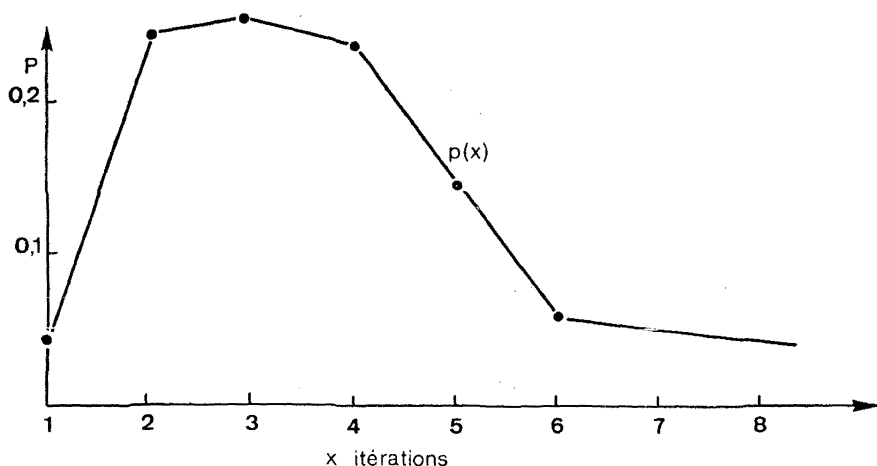


Figure 1

En ce qui concerne le nombre d'itérations voici à titre indicatif une statistique tirée d'un exemple où les coefficients du modèle M1 ont été choisis au hasard (fig. 1).

$$m = 3 ;$$

$$n = 20 ;$$

$$\Delta = \binom{m+n-1}{m-1} = \binom{22}{2} = 231$$

$$p(x) = \frac{\text{nombre de problèmes auxiliaires résolus en } x \text{ itérations}}{\text{nombre total de problèmes auxiliaires}}$$

Ici la valeur moyenne de  $p$  est environ 3 itérations par problème auxiliaire lorsque la solution du problème auxiliaire précédent est utilisée comme solution approximative. Si au lieu de prendre la solution « voisine » précédente, on prenait une solution quelconque comme approximation, cette valeur moyenne serait de 10 itérations par problème auxiliaire.

On a déjà mentionné plus haut que le voisinage des vecteurs  $a$  successifs ne déterminait pas encore complètement l'ordre chronologique des calculs. La relation d'ordre qui a été utilisée, a été choisie pour les deux raisons suivantes :

— la dimension  $k \leq m$  des problèmes de transport auxiliaires ( $k$  = nombre de composantes  $a_i \neq 0$ ) joue un rôle dans les temps de calcul ; on a donc avantage à utiliser un algorithme de transport  $TP(k, n)$  au lieu de  $TP(m, n)$  lorsque  $(m - k)$  parmi les  $a_i$  sont nuls.

— on sait que la fonction  $F$  ne peut avoir de discontinuité que sur le bord de  $D$  (voir § 2) ; il est donc apparu nécessaire (surtout pour une énumération partielle) de classer les faces du polyèdre  $D$  par dimension  $k \leq m$  ( $k$  = nombre de composantes  $a_i \neq 0$ ).

L'ensemble  $A$  de tous les vecteurs  $a$  se trouve donc scindé en  $m$  sous-ensembles  $A_v$  ( $v = 1, 2, \dots, m$ ) disjoints :

$$A = \bigcup_{v=1}^m A_v, A_v \cap A_\mu = \emptyset, \forall v \neq \mu$$

où  $A_v$  contient tous les vecteurs  $a$  qui disposent exactement de  $v$  composantes  $\neq 0$ .

A l'intérieur de chaque sous-ensemble  $A_v$  l'énumération repose sur le concept de voisinage.

L'ordre chronologique pour engendrer les vecteurs  $a$  est donc le suivant :

$v = 2$ ) : Énumérer tous les vecteurs  $a$  du sous-ensemble  $A_1 \cup A_2$ , en passant d'un voisin à l'autre,

$v = 3, \dots, m$ ) : Énumérer tous les vecteurs  $a$  du sous-ensemble  $A_v$ , en passant d'un voisin à l'autre.

L'exemple suivant montre comment la succession des problèmes auxiliaires est engendrée par cette procédure :

$$\text{Soit } m = 3 \text{ et } n = 4, \Delta = \binom{m+n-1}{m-1} = \binom{6}{2} = 15$$

$v = 2$ ) Classe  $A_1 \neq A_2$  . (une ou deux composantes  $a_i \neq 0$ )

$$\begin{array}{lll} a^1 = (4, 0, 0) & a^5 = (0, 4, 0) & a^9 = (0, 0, 4) \\ a^2 = (3, 1, 0) & a^6 = (0, 3, 1) & a^{10} = (1, 0, 3) \\ a^3 = (2, 2, 0) & a^7 = (0, 2, 2) & a^{11} = (2, 0, 2) \\ a^4 = (1, 3, 0) & a^8 = (0, 1, 3) & a^{12} = (3, 0, 1) \end{array}$$

$v = 3$ ) Classe  $A_3$  : (tous les  $a_i \neq 0$ )

$$a^{13} = (2, 1, 1) \quad a^{14} = (1, 2, 1) \quad a^{15} = (1, 1, 2)$$

On vérifie aisément que le « voisinage » est respecté par cet ordre chronologique.

Finalement, la méthode de résolution par *énumération totale* se résume par les points suivants :

- a) Engendrer les vecteurs  $a$  dans l'ordre prescrit.
- b) Résoudre pour chaque  $a$  le modèle réduit  $\bar{M}(a)$  par l'algorithme de transport : la solution est appelée  $\bar{x}^{opt}$ .
- c) Calculer  $y = \mathcal{L}(\bar{x}^{opt})$  et évaluer  $F(y)$ .
- d) Conserver la ou les meilleures solutions :  $y$  et  $F(y)$ .

## § 7. Énumération implicite

La méthode par énumération totale de tous les candidats pour l'optimum global ne fait intervenir la fonction  $F$  explicitement que dans la phase ultime de l'algorithme, c'est-à-dire dans le choix de la meilleure parmi plusieurs solutions qui ont été déterminées indépendamment de  $F$ . Une telle approche est certainement adéquate lorsque plusieurs fonctions  $F$  différentes doivent être considérées, ou lorsque la structure de  $F$  se prête difficilement au mécanisme d'approximation (par linéarisation ou autre). Cependant, dans bien des cas, la fonction  $F$  a une forme telle qu'il est évident (par avance ou au cours des calculs) que certaines des solutions apparaissant dans l'énumération totale n'ont aucune chance de fournir l'optimum global et l'on tentera naturellement d'éviter le calcul de telles solutions défavorables. Nous allons voir dans les paragraphes suivants plusieurs manières de parvenir à une réduction des calculs, qui sont basées sur une *énumération partielle* de l'ensemble des candidats (= sommets du polyèdre  $D$ ).

### 7.1. Le problème à frais fixes (fixed charge problem)

Ce cas particulier des problèmes à fonction objective concave doit sa réputation au fait :

— d'une part qu'il représente souvent une meilleure image de la réalité économique qu'un modèle linéaire,

— et d'autre part qu'il se laisse décomposer en un problème discret (à variables logiques 0, 1) et un problème linéaire (souvent trivial) ce qui permet de trouver la solution optimale avec des temps de calcul raisonnables.

On peut admettre une fonction  $F$  concave de la forme

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m) = f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) + \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i$$

ou, plus généralement  $F = f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) + g(y_1, y_2, \dots, y_m)$  où  $g(y)$  est une fonction concave continue en  $y$  ; ici  $\delta$  est défini par

$$\delta_i = \delta_i(y_i) = \begin{pmatrix} = 0 & \text{si } y_i = 0 \\ = 1 & \text{si } y_i > 0 \end{pmatrix} \text{ avec } y_i \geq 0.$$

De plus pour assurer la concavité de la fonction  $F$  nous supposons que  $f$  est une fonction concave :

$$f(\delta(\lambda y + (1 - \lambda)\bar{y})) \geq \lambda f(\delta(y)) + (1 - \lambda)f(\delta(\bar{y}))$$

avec  $\lambda \in (0, 1)$  et  $y, \bar{y}$  quelconques dans  $D$ .

Cette hypothèse de concavité pour la fonction  $f$  revêt cependant un caractère particulier à cause de son argument discret  $\delta$ . Les deux propriétés suivantes sont fréquemment rencontrées et elles impliquent la concavité de  $f$  :

$$a) f(\delta) = f(\bar{\delta}), \quad \forall \delta, \bar{\delta} \in \mathbf{R}_+ \text{ tels que l'on ait } \forall i \in M : \delta_i = 0 \leftrightarrow \bar{\delta}_i = 0$$

c'est-à-dire la fonction  $f$  ne dépend de  $\delta$  que suivant le critère  $\delta = 0$  ou  $\delta \neq 0$ .

$$b) f(\delta) \geq f(\bar{\delta}), \quad \forall \delta, \bar{\delta} \in \mathbf{R}_+ \text{ tels que } \forall i \in M : \delta_i > \bar{\delta}_i$$

$f$  peut être donc considérée comme monotone en  $\delta$ , c'est-à-dire par exemple que la valeur de  $f$  augmente  $f(\bar{\delta}) \geq f(\delta)$  si l'on pose égale à 1 ( $\bar{\delta}_{i_0} = 1$ ) une composante nulle de  $\delta$  ( $\delta_{i_0} = 0$ ), tout en laissant les autres composantes inchangées

$$\delta_i = \bar{\delta}_i \quad \forall i \neq i_0$$

On montre que a) et b) impliquent la concavité de  $f$

$$\begin{aligned} f(\delta(\lambda y + (1 - \lambda)\bar{y})) &= f(\lambda \delta(y) + (1 - \lambda)\delta(\bar{y})) \geq \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \nwarrow \\ &\quad a) \qquad \qquad \qquad b) \\ &\geq \max(f(\delta(y)), f(\delta(\bar{y}))) = \lambda \max(\cdot, \cdot) + (1 - \lambda) \max(\cdot, \cdot) \\ &\geq (1 - \lambda)f(\delta(y)) + \lambda f(\delta(\bar{y})). \\ &\quad \uparrow \\ &\lambda \in (0, 1). \end{aligned}$$

Pour les modèles M1 et M2 ce cas particulier illustre bien l'importance qu'il faut attribuer à la séparation des vecteurs  $a$  en classes  $A_v$ ,

$v = 1, 2, \dots, m$ ) correspondant aux faces de dimension  $v$  du polyèdre  $D$ . En effet la fonction concave  $F$  définie sur  $D$  est continue dans chaque face mais en général elle peut avoir une discontinuité en passant d'une face à l'autre (car ceci revient à poser une composante  $y_i = 0$ ), même lorsque ces dernières sont adjacentes ; en effet la fonction  $f(\delta)$  admet une valeur différente sur chaque face. Il devient alors évident qu'une estimation par linéarisation ne peut fonctionner de manière satisfaisante qu'à l'intérieur d'une face. Nous allons voir maintenant comment on peut énumérer implicitement des faces toutes entières.

## 7.2. L'énumération et évaluation progressive (Branch and Bound)

On appelle nœud  $n^k$  un ensemble de vecteurs  $a = (a_1, \dots, a_m)$  de la forme

$$n^k : \begin{cases} a_i \text{ « connus »,} & \forall i_k \in K \subset M \\ a_i \text{ indéterminés,} & \forall i \in M - K \end{cases}$$

par « connu », on entend que l'on sait que

- soit  $a_{i_k}$  a reçu la valeur zéro :  $a_{i_k} = 0$ ,
- soit  $a_{i_k}$  prend une valeur non spécifiée mais différente de zéro :  $a_{i_k} \neq 0$ .

Le but que l'on veut atteindre ici est d'utiliser une borne inférieure, pour la valeur de  $F$  qui correspond à chaque vecteur  $a$  contenu dans le nœud  $n^k$  ; si cette borne inférieure est plus grande que la meilleure valeur connue  $Z_{\min}$ , on peut alors manifestement énumérer implicitement tous les vecteurs  $a$  de  $n^k$ , c'est-à-dire laisser tous les descendants de  $n^k$  de côté.

On peut se représenter le cas  $m = 3$ , par exemple, à l'aide de l'arborescence ci-contre fig. 2.

Dans cet arbre l'indice  $k$  est aussi appelé *niveau* du nœud  $n^k$  et l'on remarque qu'il y a  $2^k$  nœuds distincts au niveau  $k$  (en fait il y a  $2^{(m+1)} - 1$  nœuds différents dans l'arbre).

Chaque niveau  $k$  peut être engendré à partir du niveau supérieur  $(k - 1)$  en procédant à la dichotomie de chaque nœud  $n^{k-1}$  d'après le critère :  $a_{i_k} = 0$  ou  $a_{i_k} \neq 0$ . Au niveau le plus bas ( $k = m$ ) chaque nœud représente une *face du polyèdre  $D$* , c'est-à-dire un ensemble de vecteurs  $a$  qui ont tous les mêmes composantes  $a_v$  nulles, et tous les mêmes composantes  $a_\mu$  différentes de zéro.

La construction algorithmique d'un tel arbre est simple et correspond à la séparation de l'ensemble  $A$  de tous les vecteurs  $a$  en sous-ensembles complémentaires et disjoints [S13] ; on a par exemple

$$n_1^1 \cup n_3^2 \cup n_4^2 = A$$

et ces trois nœuds n'ont pas d'éléments communs.

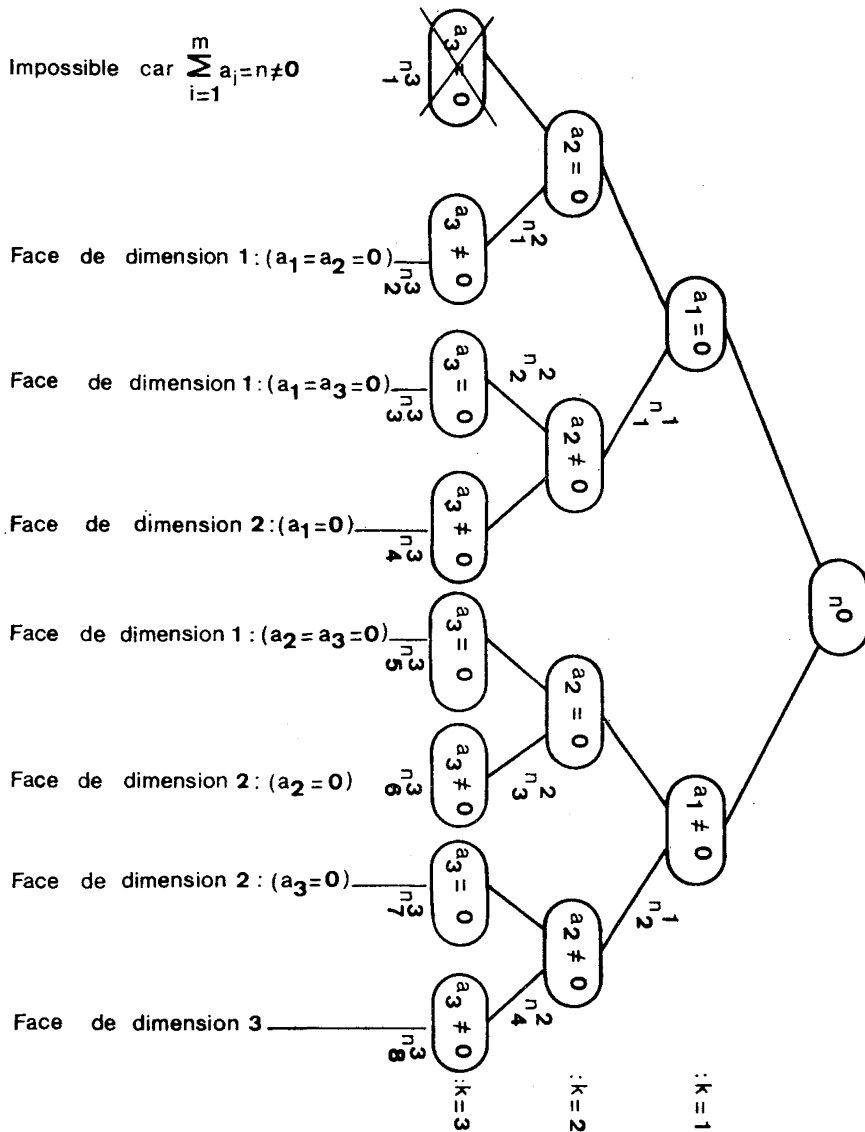


Figure 2

La procédure d'énumération et évaluation progressive se déroule comme suit :

1) A partir du nœud que l'on vient de traiter on recherche parmi tous les nœuds stockés (voir 2)) celui qui possède la borne inférieure  $B$  la plus petite ; appelons-le  $(n_v, B_v)$ .



— Si cette borne  $B_v$  est plus grande que la meilleure valeur  $Z_{min}$  actuelle,  $Z_{min}$  est la solution optimale (STOP!) ; sans cela on passe à 2).

2) Calcul des bornes inférieures pour les deux descendants de  $n_v$  ; stockage de ces deux nœuds avec leurs bornes.

— Si ces descendants sont au dernier niveau ( $k = m$ ), on procède à l'énumération (partielle ou totale) de tous les vecteurs  $a$  qui sont compris dans la face correspondante ;

et ainsi de suite en repassant par 1).

Nous ne voulons pas entrer ici dans le détail des calculs des bornes inférieures (par linéarisation de  $F$ , par exemple), mais on notera que, dans la construction de cet arbre on procède par *faces du polyèdre  $D$ ,  $y$  compris leurs bords*.

Ceci a pour effet d'éliminer (au fur et à mesure où l'on descend dans l'arbre) le saut ou la forte concavité que la fonction  $F$  possède lorsque un ou plusieurs de ses arguments sont nuls. On obtient donc des bornes inférieures par linéarisation d'une précision plus grande puisque la linéarisation se fait dans une région où  $F$  a une plus faible concavité.

#### REMARQUES

— L'arborescence présentée ici repose essentiellement sur le concept de dimension des vecteurs  $a$ . Dans certains cas cependant, on préférera définir un nœud  $n^k$  par

$$n^k : \begin{cases} a_i \text{ « connus » c'est-à-dire } \begin{cases} \text{soit } a_{ik} \leq 2 \\ \text{ou } 2 < a_{ik} \leq n \end{cases} \\ a_i \text{ indéterminé, } \quad \forall i \in (M - K) \end{cases} \quad \forall i_k \in K \subset M$$

l'arbre sera alors basé sur la dichotomie (fig. 3)

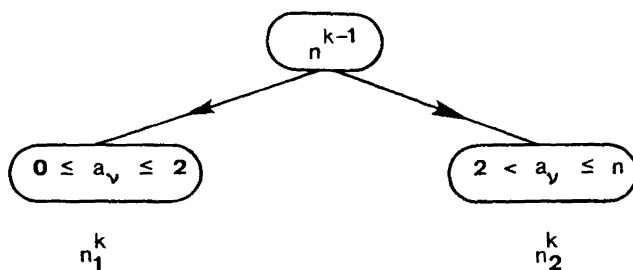


Figure 3

ou encore sur la trichotomie (resp. polytomie) fig. 4.

Un tel choix dépend évidemment de la forme de la fonction  $F$  et du genre de sa concavité.

— L'ordre avec lequel les composantes  $a_i$  se voient assigner la valeur zéro n'est pas toujours lexicographique (comme ci-dessus :

$i = 1, 2, 3, \dots, m)$  [S6] ; au contraire on a avantage à choisir judicieusement la composante de  $a$  sur laquelle la dichotomie (resp. polytomie) portera, pour définir le prochain niveau. Cette sélection permet d'éliminer plus tôt des nœuds comportant un grand nombre de vecteurs  $a$  défavorables [S9].

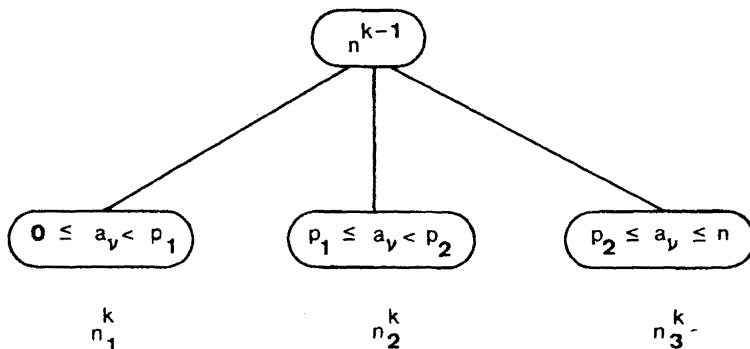


Figure 4

## § 8. La décomposition

Pour fixer les idées, considérons le cas pratique suivant :

### 8.1. Réseau de production-distribution à fonctions-coûts concaves

Une entreprise pétrolière possède  $m$  centres de stockage  $i (= 1, \dots, m)$  (raffineries, installations portuaires ou entrepôts) où peuvent venir s'approvisionner  $n$  filiales  $j (= 1, \dots, n)$ .

— Les frais annuels de production, transport, raffinage et stockage du pétrole brut se reflètent par une fonction concave  $F(y_1, y_2, \dots, y_m)$ ,  $y_i$  étant la quantité annuelle de pétrole raffiné distribué par le centre  $i = 1, 2, \dots, m$ .

— Chaque filiale  $j = 1, 2, \dots, n$  a une demande annuelle de  $l_j$  (tonnes) de pétrole raffiné qui doit lui être fournie par un des centres  $i$ .

— L'acheminement d'une tonne de pétrole raffiné entre l'entrepôt  $i$  et la filiale  $j$  coûte  $c_{ij}$  ; ces coefficients  $c_{ij}$  tiennent compte de la distance, du moyen de transport (camion, pipe-line, chemin de fer) et de toutes autres caractéristiques propres au couple  $(i, j)$ .

— L'ensemble des frais de distribution est représenté par une fonction concave  $F_0(y_0)$ , les frais de production et stockage par  $F(y)$ . On a donc

$$y_0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad , \quad \forall i \in M$$

$$l_j = \sum_{i=1}^m x_{ij} \quad , \quad \forall j \in N \quad (\text{Chaque demande doit être satisfaite.})$$

Les frais totaux sont

$$Z = F(y_1, \dots, y_m) + F_0(y_0) = \min! \quad , \quad \{ F \text{ et } F_0 \text{ concaves} \}.$$

(exemple du type M1).

### 8.2. Polytomie partielle

En principe on pourrait admettre que chaque filiale  $j \in N$  peut être desservie par n'importe lequel des centres  $i = 1, \dots, m$ . En réalité cependant, la configuration géographique, technique et administrative du réseau de distribution est telle que seuls 4 ou 5 centres  $i \in M$  entrent en question pour la livraison d'une filiale  $j \in N$ .

Ce serait donc un non-sens de partir du modèle M1 qui contient  $m^n$  solutions alors qu'en réalité le système ne possède que grosso modo  $(4 \text{ ou } 5)^n$  solutions possibles. Il convient donc d'interdire certaines liaisons  $(i, j)$  en posant  $c_{ij} = \infty$ , ou mieux, en modifiant l'algorithme de transport de sorte que  $(i, j)$  n'intervienne jamais dans la solution. En modifiant ainsi la méthode de résolution de chaque modèle réduit  $\overline{M1}(a)$  (ou  $\overline{M2}(a)$ ), on peut réduire considérablement les temps de calcul.

### 8.3. Méthode de réduction du degré de polytomie

Jusqu'ici on ne s'est occupé que des liaisons  $(i, j)$  qui étaient *interdites* a priori. Cependant il arrive souvent que les données contiennent plusieurs autres liaisons qui, quoique théorétiquement possibles, se révèlent très défavorables ; dans ce cas on tentera donc, *avant le début de l'énumération*, de repérer et interdire de telles liaisons  $(i, j)$  en posant d'office  $x_{ij} = 0$  ; une procédure décrite dans [S12] procède à ce repérage en établissant la certitude qu'une liaison nouvellement interdite ne peut être optimale.

La méthode de décomposition permet de diminuer les temps de calcul de deux manières :

— d'une part il y a moins de vecteurs  $a$  possibles puisque certaines liaisons sont interdites,

— et d'autre part chaque problème réduit  $\overline{M}(a)$  nécessite moins de calculs puisque certaines variables  $x_{ij}$  sont toujours nulles.

Dans le même ordre d'idées, il arrive que la capacité des centres  $i \in M$  soit limitée quant au nombre  $a_i$  de clients, ou que le problème comporte des restrictions supplémentaires pour les vecteurs  $a$  (et leurs composantes  $a_i$ ). De telles restrictions peuvent être introduites sans autre, dans l'énumération, en éliminant les vecteurs  $a$  qui ne satisfont pas ces conditions supplémentaires.

### § 9. Recherche d'un optimum probable

Dans les paragraphes précédents on a vu comment la solution des modèles M1 et M2 peut être obtenue par énumération. Les trois méthodes d'énumération esquissées (totale et par évaluation progressive) font toutes usage de sous ensembles  $A_v \subset A = \{\text{ensemble des vecteurs } a\}$ .

Dans les méthodes d'énumération implicite par évaluation progressive on utilise une borne inférieure  $B_v$  de la fonction objective pour énumérer implicitement le sous-ensemble  $A_v$ . Ce mécanisme d'élimination fonctionne de la manière suivante :

Soit l'ensemble  $E$  des sommets du polyèdre  $D$ . On dénote par  $P(E)$  l'ensemble de tous les sous-ensembles de  $E$ .

Soit en outre une fonction  $\Phi$  définie sur l'ensemble  $E$  des sommets de  $D$ . On appelle alors *borne inférieure* de  $\Phi$  sur  $S$ , la fonction  $B_\Phi : P(E) \rightarrow \mathbf{R}$ , définie par

$$B_\Phi(S) \leq \Phi(y) \quad , \quad \forall y \in S \quad (6)$$

où  $S \in P(E)$  est un sous-ensemble quelconque de  $E$ .

$B_\Phi(S)$  fournit ainsi une borne inférieure pour  $\Phi$  dans l'ensemble  $S$ .

Si maintenant, au cours de l'énumération, un sous-ensemble  $S \in P(E)$  peut être distingué tel que

$$B_\Phi(S) \geq \hat{\Phi}_{\min}$$

où  $\hat{\Phi}_{\min}$  est la meilleure valeur connue, on énumère l'ensemble  $S$  implicitement [S9].

Dans la conception déterministe des bornes inférieures on remarque que l'amélioration de la borne  $B_\Phi$  (c'est-à-dire le calcul d'une fonction  $\bar{B}_\Phi$  permettant d'énumérer implicitement un plus grand nombre d'éléments  $S \in P(E)$  que la fonction  $B_\Phi$ ) est généralement liée à une forte amplification des temps de calcul, de sorte que le gain net est minime (voire nul ou même désavantageux !).

Le vœu et (le besoin !) de diminution des temps de calcul pour des problèmes de grande taille doit donc se fonder sur un concept nouveau de la borne inférieure ; celui-ci se base sur un *critère aléatoire* d'élimination, moins rigoureux mais certainement plus accessible ; la fonction  $\Phi(y)$  est ici considérée comme une *variable aléatoire* définie sur l'ensemble  $E$  discret et fini des sommets du polyèdre  $D$  [S7]. On remplacera alors la définition de  $B_\Phi$  dans (6) par

$$\Pr \{ B_\Phi(S) \leq \Phi(y) \mid \forall y \in S \} \geq 1 - \alpha$$

où  $S \in P(E)$  est un sous-ensemble de  $E = \{\text{ensemble des sommets du polyèdre } D\}$  et  $0 \leq \alpha \leq 1$ . De telles bornes inférieures  $B_\Phi$  peuvent être utilisées dans l'énumération implicite comme les bornes déterministes, et l'on dit que si

$$B_\Phi(S) \geq \hat{\Phi}_{\min}, \quad (\hat{\Phi}_{\min} = \text{meilleure valeur connue}),$$

l'ensemble  $S$  peut être énuméré implicitement au seuil (ou au niveau) de confiance  $\alpha$  puisque  $\Pr \{ B_\Phi(S) > \Phi(y) \mid y \in S \} \leq \alpha$ .

Bien sûr une telle énumération peut très bien ne pas déterminer l'optimum global (au sens déterministe) et fournir une valeur qui n'est que sous-optimale [S7].

L'expérience montre cependant que ces bornes inférieures  $B_\Phi$  permettent d'éliminer une partie substantielle des vecteurs  $a$  sans toutefois introduire un risque réel de fournir une mauvaise solution (souvent l'optimum global n'a pas été énuméré implicitement et la solution est donc exacte). On appelle l'optimum ainsi déterminé un *optimum probable au niveau de confiance  $\alpha$* .

Dans la résolution des modèles M1 ou M2, une telle approche se heurte cependant encore à deux difficultés :

— La première provient du fait que les sommets du polyèdre  $D$  ne sont pas connus d'avance et qu'il est donc difficile de définir *a priori* l'ensemble fondamental  $E$ .

— la seconde est due au fait que la fonction  $\Phi$  dont on veut une borne inférieure est la fonction économique  $Z = F(y)$ . Puisque  $F$  est une fonction (concave) *quelconque* il est clair qu'il est pratiquement impossible d'admettre pour la variable aléatoire  $\Phi$  une loi de distribution d'un type connu.

Cet état de chose est évidemment un inconvénient majeur, car la précision (et la puissance éliminatoire) des bornes inférieures  $B_\Phi$  dépend de la fonction de distribution de  $\Phi$  ; en effet lorsque cette loi de distribution est connue, on peut établir un meilleur seuil de confiance  $\alpha$  pour l'optimum probable.

### 9.1. Les moments des fonctions de distribution des variables aléatoires $y$

Afin de contourner la première des difficultés mentionnées ci-dessus, on va considérer comme ensemble fondamental tout l'ensemble des solutions possibles des modèles M1 (ou M2), c'est-à-dire l'ensemble  $E$  des sommets du polyèdre  $\bar{C}$  des modèles réduits  $\bar{M1}$  ou  $\bar{M2}$ .

La structure du polyèdre  $\bar{C}$ , donnée par

$$\bar{x}_{ij} \in [0, 1]$$

et

$$\sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = 1, \quad \forall j \in N$$

permet de définir les sous-ensembles  $S_{ij} \in P(E)$ ,  $\forall i \in M, \forall j \in N$  :

$$S_{ij} = \{ \bar{x} \mid \bar{x}_{ij} = 1 \} \quad i \in M, \quad j \in N$$

et les variables aléatoires  $X_{ij}(\bar{x})$

$$X_{ij}(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x} \in S_{ij} \\ 0 & \text{si } \bar{x} \notin S_{ij} \end{cases}.$$

Il est clair que cette définition des variables aléatoires  $X$  ne tient nullement compte du fait que seuls les sommets du polyèdre  $D$  peuvent fournir une solution optimale ; pour ce faire il faut se reporter au schéma d'énumération partielle (§ 7) :

Admettons donc que les valeurs  $a_i, \forall i \in I \subset M$  soient données et que les composantes  $a_i, \forall i \in I^* = M - I$  soient indéterminées. Ceci définit un ensemble  $A_v$  de vecteurs  $a$ , tel qu'il survient dans l'énumération par évaluation progressive. ( $A_v$  est appelé *condition* (ou *solution*) *partielle* [S9].)

Admettons en outre que l'on connaisse la solution  $\tilde{x}$  correspondant à un vecteur  $\tilde{a}$  voisin de ceux de  $A_v$ . On peut ainsi définir pour chaque  $j \in N$  l'espérance mathématique  $\mu(X_{ij}) = \Pr(S_{ij})$  par

$$\Pr(S_{ij}) = \mu(X_{ij}) := \begin{cases} = p\tilde{x}_{ij} + \frac{1-p}{n} a_i & , \quad \forall i \in I \subset M \\ = p\tilde{x}_{ij} + \frac{1-p}{n} \frac{s}{\rho} & , \quad \forall i \in I^* = M - I \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} s &= n - \sum_{i \in I} a_i, \\ \rho &= |I^*| = m - |I|, \\ 0 &\leq p < 1 \end{aligned}$$

Le paramètre  $p$  peut être choisi à volonté, et il rend compte du fait que les vecteurs  $a \in A_v$  sont voisins de  $\tilde{a}$ . Il faut remarquer ici que bien que les solutions correspondant à des vecteurs  $a$  voisins soient souvent fort différentes, l'introduction du paramètre  $p$  permet d'éliminer l'influence de solutions possibles mais très défavorables en comparaison de l'optimum des problèmes réduits  $\bar{x}^{opt}(a), a \in A_v$ . On ne considère ainsi que des sommets de  $C$  qui sont proches des sommets de  $D$  en leur donnant une plus forte probabilité. On a en outre  $\forall j \in N$  :

$\Pr(S_{ij} \cup S_{kj}) = \mu(X_{ij} + X_{kj}) = \mu(X_{ij}) + \mu(X_{kj}), (S_{ij} \text{ et } S_{kj} \text{ sont disjoints})$   
et par conséquent

$$\begin{aligned} \Pr\left(\bigcup_{i=1}^m S_{ij}\right) &= \mu\left(\sum_{i=1}^m X_{ij}\right) = \sum_{i=1}^m \mu(X_{ij}) \\ &= \underbrace{p \sum_{i=1}^m \tilde{x}_{ij}}_p + \frac{1-p}{n} \underbrace{\left(\sum_{i \in I} a_i + s\right)}_n = p + (1-p) = 1 \end{aligned}$$

Cette définition tient donc compte du fait que  $\sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij}^{opt} = 1, \forall j \in N$ .

Pour la variance  $\sigma^2(X_{ij})$  on a

$$\sigma^2(X_{ij}) = \mu(X_{ij})^2 - \mu^2(X_{ij}) = \Pr(S_{ij}) - \Pr^2(S_{ij})$$

donc  $j \in N$  :

$$\sigma^2(X_{ij}) = \begin{cases} = p\tilde{x}_{ij} + \frac{1-p}{n} a_i - p^2\tilde{x}_{ij} - \frac{(1-p)^2}{n^2} a_i^2 - \frac{2p(1-p)}{n^2} a_i\tilde{x}_{ij}, & \forall i \in I \\ = p\tilde{x}_{ij} + \frac{1-p}{n} \frac{s}{\rho} - p^2\tilde{x}_{ij} - \frac{(1-p)^2}{n^2} \frac{s^2}{\rho^2} - \frac{2p(1-p)}{n^2} \frac{s}{\rho} \tilde{x}_{ij}, & \forall i \in I^* \end{cases}$$

Enfin il faut encore mentionner les conditions

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i, \quad \forall i \in I$$

et

$$\sum_{i \in I^*} \sum_{j=1}^n X_{ij} = s$$

qui indiquent que les variables  $X_{ij}$  ne doivent pas être considérées comme indépendantes.

On peut maintenant calculer les moments des variables aléatoires  $y$  des modèles M1 et M2 :

$$\begin{aligned} M1 : \mu(y_i) &= \mu\left(\sum_{j=1}^n l_j X_{ij}\right) = \sum_{j=1}^n l_j \mu(X_{ij}) \\ &= \begin{cases} p\tilde{y}_i + \frac{1-p}{n} \cdot a_i \cdot V & \forall i \in I \\ p\tilde{y}_i + \frac{1-p}{n} \frac{s}{\rho} \cdot V & \forall i \in I^* \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{avec } V = \sum_{j=1}^n l_j$$

$$\begin{aligned} \mu(y_0) &= \mu\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n l_j c_{ij} X_{ij}\right) = \sum_{i,j} l_j c_{ij} \mu(X_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^n l_j \left( \sum_{i \in I} c_{ij} a_i + \frac{s}{\rho} \sum_{i \in I^*} c_{ij} \right) \frac{1-p}{n} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M2 : \mu(y_i) &= \mu\left(\sum_{j=1}^n l_j c_{ij} X_{ij}\right) = \sum_{j=1}^n l_j c_{ij} \mu(X_{ij}) \\ &= \begin{cases} p\tilde{y}_i + \frac{1-p}{n} a_i L_i, & \forall i \in I \\ p\tilde{y}_i + \frac{1-p}{n} \frac{s}{\rho} L_i, & \forall i \in I^* \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{avec } L_i = \sum_{j=1}^n l_j c_{ij}, \quad \forall i \in M$$

Les variances pour les variables  $y$  peuvent être obtenues à l'aide de la relation

$$\sigma^2(y) = \mu(y^2) - \mu^2(y) ;$$

il faut toutefois tenir compte des interdépendances des variables  $X_{ij}$ , ce qui conduit à de longs développements qui ne sont pas présentés ici [S7], [S3].

## 9.2. Les bornes inférieures $B_\Phi$ et leur seuil de confiance

La deuxième difficulté à surmonter est due à la définition de la variable aléatoire  $\Phi$  sur laquelle repose le calcul d'une borne inférieure  $B_\Phi$  pour la fonction économique  $Z$ .

On a  $\Phi := F(y)$  où  $F$  est une fonction concave quelconque. En admettant que les variables aléatoires  $y_i$  aient une densité  $g_i(\eta_i)$ , on aura

$$\mu(\Phi) = \int F(\eta) g(\eta) d\eta$$

et il est évident qu'il n'est en général pas possible de calculer sans autre une telle expression.

Nous allons envisager deux manières de se tirer d'affaire :

— Sur la base des définitions et résultats de 9.1., on peut montrer que le comportement asymptotique des fonctions de distribution des variables aléatoires  $y_i$  est connu, et qu'il peut être approximé par une *fonction de distribution normale* ; on peut donc poser

$$g_i(\eta_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\eta_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}}$$

avec

$$\mu_i = \mu(y_i)$$

et

$$\sigma_i^2 = \mu(y_i - \mu_i)^2.$$

Cela étant, on peut maintenant calculer  $\mu(\Phi)$  (et  $\sigma^2(\Phi)$ ) par intégration analytique (lorsque  $F$  est de forme simple) ou numériquement ; l'expérience a montré qu'une intégration numérique relativement grossière suffit amplement à la détermination de bornes suffisamment précises [S3].

Lorsque les moments  $\mu$  et  $\sigma^2$  de  $\Phi$  sont connus on peut donner une borne inférieure  $B_\Phi = \mu - k\sigma$  avec le seuil de confiance  $\frac{1}{k^2}$  car, pour  $k > 0$  l'inégalité de Chebyshev donne

$$\Pr\{|\Phi - \mu| < k\sigma\} \geq 1 - 1/k^2 \text{ donc } \Pr\{-k\sigma < \Phi - \mu < k\sigma\} \geq 1 - 1/k^2$$

ou

$$\Pr\{-k\sigma < \Phi - \mu\} \geq 1 - 1/k^2$$



et enfin

$$\Pr \{ \underbrace{\mu - k\sigma}_{B_\Phi} < \Phi \} \geq 1 - 1/k^2 = 1 - \alpha,$$

avec  $\alpha = \frac{1}{k^2}$ .

— La deuxième manière évite la difficulté en modifiant le sens du problème ; supposons que la fonction  $F$  soit concave et monotone croissante. On pourra alors souvent se contenter de la fonction de distribution des variables  $y_i$  dans le calcul d'une borne inférieure ; on aura

$$B_\Phi := F(\mu - k\sigma) \quad \text{avec} \quad \Pr\{ \Phi(y) \geq B_\Phi \} \geq 1 - \alpha$$

où le seuil de confiance  $\alpha$  satisfait  $\frac{1}{m!} \left( \frac{m}{k^2} \right)^m \leq \alpha \leq 1 - (1 - 1/k^2)^m$  (7) et où  $\mu_i - k\sigma_i$  est une borne inférieure pour  $y_i$  par l'inégalité de Chebyshev

$$\Pr \{ y_i \leq \mu_i - k\sigma_i \} \leq \frac{1}{k^2}.$$

On voit ici que la borne  $B_\Phi$  a un caractère tout différent, puisque l'on se contente ici de la fonction de distribution de l'argument de  $F$  alors que précédemment on a obtenu un seuil de confiance valable pour la valeur de  $F$ .

Cette manière permet cependant d'éviter l'intégration (numérique) de  $\mu(\Phi)$  ce qui diminue considérablement les temps de calcul sans toutefois réduire de trop la valeur pratique de l'optimum probable ainsi obtenu (malgré un seuil de confiance  $\alpha$  défini de façon peu précise, c'est-à-dire satisfaisant à l'inégalité (7)).

## § 10. Exemples

Nous avons déjà rencontré quelques exemples au cours de cette étude ; les paragraphes 4 et 5 contiennent une illustration des modèles M1 et M2 dans l'industrie des articles de mode, et le paragraphe 8 une application de M1 à un système de distribution. Sans vouloir épuiser le domaine des applications des modèles M1 et M2, voici encore deux cas-types qui peuvent présenter de l'intérêt pour le praticien [S4] [S8].

### 10.1. Investissement optimal des moyens de production pour l'accomplissement de plusieurs contrats

Admettons qu'un contrat du type  $C_j$  puisse être réalisé à l'aide de plusieurs moyens de types différents  $M_i$ .

Cette situation apparaît dans la construction de pièces mécaniques ou électriques avec plusieurs matériaux possibles, la livraison de fourni-

tures par différents moyens de transport, la planification d'un ouvrage dont les éléments peuvent être choisis de plusieurs genres etc...

En général la quantité  $c_{ij}$  des moyens investis pour la résolution du contrat  $C_j$  sera différente suivant le moyen  $M_i$  utilisé ; et on a aussi souvent  $l_j$  contrats du même type  $C_j$  à réaliser.

Finalement on peut admettre pour des problèmes de ce genre une fonction coût concave  $F$  qui détermine les coûts de la réalisation et qui doit être rendue minimale.

On a 
$$y_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad , \quad \forall i \in M$$

$y_i$  = quantité totale du moyen  $M_i$  utilisé dans la solution,

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = l_j \quad , \quad \forall j \in N$$

et  $Z = F(y_1, y_2, \dots, y_m) = \min!$ , obtenant ainsi un modèle du type M2.

Quelques applications de ce type ont été décrites dans [S1] et [S2], ainsi qu'une méthode de solution que l'on pourra comparer à celles décrites dans notre étude.

La différence essentielle des deux approches provient de proposition 2 qui nous permet ici de définir la classe des candidats à l'optimum global pour chaque  $m$ , et non seulement pour  $m \leq 2$  comme dans ces articles.

## 10.2. Problème de production et stockage [S4]

Dans une fabrique de produits chimiques, on considère une chaîne de production d'un type de colorant. Ce colorant doit être fabriqué en plusieurs ( $q$ ) teintes et l'on connaît la demande annuelle (par les quantités mensuelles  $l_j$ ) de chaque coloris pour chaque mois de l'année ( $j = 1, \dots, 12q = n$ ).

La planification du programme de production doit tenir compte des deux possibilités suivantes :

A) Produire chaque couleur au fur et à mesure de la demande, c'est-à-dire par exemple produire chaque mois la quantité exacte de chaque couleur nécessaire pendant ce mois.

B) Chaque fois que la production d'une couleur est mise en route sur la chaîne, on en produit une grande quantité qui sera ensuite stockée, afin de couvrir les besoins mensuels en puisant dans le stock.

La variante A) implique de nombreuses interruptions, nettoyages et remises en route de la chaîne, ce qui est, du point de vue technique, très onéreux. La variante B) implique des frais de stockage, dépréciation, risque de mévente, erreurs de prédiction de la demande...

Mais ces deux tendances opposées dans la planification d'un programme de production se laissent bien décrire par une fonction-coût concave  $F$  et le modèle M1 permet d'établir un programme optimal.

Admettons que chaque couleur soit produite (au plus)  $p$  fois dans l'année et qu'il y ait  $q$  couleurs différentes ; on a donc  $m = p \cdot q$  quantités  $y_i \geq 0$  à déterminer pour obtenir un programme de production :

$$y_i = \sum_{j=1}^n l_j \bar{x}_{ij} \quad , \quad \forall i \in M = \{1, 2, \dots, m = p \cdot q\}$$

où  $n = 12 \cdot q$ , (12 mois dans l'année) et  $l_j$  = quantité requise pour le mois et la couleur correspondants.

D'autre part pour la quantité totale du stock on a :

$$y_0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n l_j c_{ij} \bar{x}_{ij}$$

où  $c_{ij}$  = sollicitation du système de stockage par une quantité unitaire de couleur produite en  $i$  pour la vendre en  $j$ , et

$$\bar{x}_{ij} \begin{cases} = 1 \text{ si la couleur a été faite pendant la période } i, \\ = 0 \text{ autrement.} \end{cases}$$

Pour la fonction-coût on pose :

$$Z = F(y_0, y_1, \dots, y_m) = \min!$$

complétant ainsi le modèle du genre M1.

## CONCLUSIONS

Le problème d'ordonnancement simple à fonction économique concave possède pour sa résolution numérique un caractère « explosif » très prononcé : pour des valeurs encore modestes des paramètres  $n$  et surtout  $m$ , la résolution d'un problème de forme générale (c'est-à-dire à coefficients déterminés au hasard) se heurte déjà à la limite de capacité d'un ordinateur moderne. Pour des exemples bâtis sur un canevas réaliste, cependant, on parvient généralement à résoudre des problèmes de grande taille, grâce à l'emploi des méthodes d'énumération implicite et de décomposition, conjointement (suivant le but recherché on peut utiliser une énumération déterministe ou aléatoire).

Pour fixer les idées, l'engagement de ces méthodes peut être fait par exemple suivant le schéma ci-dessous, en un algorithme *combiné* :

- 1) *Décomposition* : réduire le degré de polytomie et donc le nombre de solutions possibles ;
- 2) *Schéma d'énumération implicite* et évaluation progressive des nœuds ainsi définis ;
- 3) *Énumération* totale des nœuds au(x) niveau(x) inférieur(s) de l'arborescence.

Les expériences numériques faites avec chacune de ces méthodes séparément (sur des problèmes à coefficients choisis au hasard) étaient toutes de taille modeste ( $m < 10$ ,  $n < 30$ ). De toute façon les temps de calcul dépendent beaucoup de la forme particulière de chaque problème, si bien qu'il serait illusoire et onéreux de chercher à obtenir des valeurs expérimentales précises ; on peut faire les remarques suivantes :

— Pour des fonctions  $F$  multiples (c'est-à-dire lorsque plusieurs fonctions  $F$  doivent être évaluées sur le même polyèdre  $D$ ) ou difficilement estimables, l'énumération totale est pratiquement compétitive avec une énumération implicite ; à part cela cette méthode est onéreuse parce qu'elle ne fait pas usage de tous les renseignements que l'on peut tirer de  $F$ .

— Pour un algorithme aléatoire, le seuil de confiance  $\alpha = 0,1$  paraît suffisant pour pratiquement garantir que l'optimum probable est également l'optimum global. Par ailleurs les temps de calculs de la méthode aléatoire se comparent très favorablement à ceux de l'énumération implicite déterministe ; on peut donc sans trop de risque quant à la valeur pratique du résultat, recommander l'emploi d'une telle approche, surtout lorsque le problème est de grande taille et qu'une énumération complète (même implicite) ne peut être effectuée.

— Si une bonne solution est connue dès le départ (par exemple provenant de la situation pratique actuelle que l'on désire améliorer par optimisation) l'énumération s'en trouve fortement accélérée par cette connaissance d'une borne.

— On obtient enfin une meilleure idée des possibilités des algorithmes proposés ici, en observant que, grosso modo, l'énumération partielle recherchant une bonne solution ou un optimum probable a permis les économies suivantes lors des expériences numériques :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 0,1 : \sim 95 \% \text{ des vecteurs } a \text{ sont éliminés} \\ \alpha = 0,05 : \sim 70 \% \text{ des vecteurs } a \text{ sont éliminés} \end{array} \right\} \text{ de l'énumération.}$$

Si l'on tient compte du fait que les vecteurs  $a$  correspondent déjà à une petite partie des solutions possibles ( $\{a\} \leftrightarrow$  classe des candidats à l'optimum), il semble que la méthode puisse se révéler d'un intérêt pratique, surtout si l'on utilise un algorithme combiné.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [S1] R. ALBRECHT, *Zum Optimum-Mix Problem bei nichtlinearen monotonen Kostenfunktionen*, Die Unternehmensforschung, Bd 11, 1967.
- [S2] R. E. BURKARD, *Untersuchungen zum Optimum-Mix Problem*, Die Unternehmensforschung, 1969.
- [S3] R. BREU, *Konkave Optimierung, Diplomarbeit IFOR-ETH*, 1969.
- [S4] F. WEINBERG et C. A. BURDET, *OR-Anwendung für die Wahl von betrieblichen Standorten, Problem der optimalen Anordnung von Verteilungs- oder Produktionszentren*, Die Unternehmung, Heft 3/1968, p. 152.
- [S5] M. RÖSSLER, *Eine Methode zur Berechnung des Optimalen Produktionsprogramms bei konkaver Zielfunktion*. IFOR-ETH 690218.

- [S6] B. KORTE, W. KRELLE et W. OBERHOFER, *Lexikographischer Suchalgorithmus zur Lösung ganzzahliger Programmierungsaufgaben*, Die Unternehmungsforschung, 13.
- [S7] G. GRAVES et A. WHINSTON, *A new approach to discrete mathematical Programming*, Management Science, Vol. 15, p. 177, 1968.
- [S8] U. v. KLOT-HEYDENFELDT, *Bestimmung der optimalen Arbeitskapazitäten von Werkstätten mit zufallsverteilter Kapazitätsbedarf mit den Methoden der Simulation und des Branch and Bound*, IFOR-ETH (1969).
- [S9] C. A. BURDET, *Vorlesung über ganzzahlige Optimierung*, IFOR-ETH, Zürich.
- [S10] K. SPEILBERG, *Algorithms for the simple Plant-Location Problem with some side conditions*, Opns. Res., Vol. 17, p. 85, 1969.
- [S11] C. A. BURDET, *Parametric programming and the minimization of a concave objective function under linear constraints*, to appear in Numerische Mathematik.
- [S12] C. A. BURDET, *Le problème d'ordonnancement (ou d'affectation) à fonction économique concave*, IFOR-ETH n° 690701.
- [S13] P. HERVÉ, « Les procédures arborescentes d'optimisation ». *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, n° 14-V3/1968.