Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

E. Valensi
J. Castagne

Problème d'affectation, localisation d'entrepôts

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 4, n° V3 (1970), p. 31-44.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1970__4_3_31_0>

R.I.R.O.
(4e année, V-3, 1970, p. 31-44)

PROBLEME D'AFFECTATION LOCALISATION D'ENTREPÔTS

par E. VALENSI et J. CASTAGNE (1)

Résumé. — *Cet article donne une procédure d'affectation optimale de moyens à des besoins sous les règles générales suivantes*

* *Tous les éléments* B_j *d'un ensemble de besoins doivent être satisfaits, un ensemble d'activités* A_i *pouvant être utilisé à cet effet.*

* *Si une activité* A_i *est utilisée, il en résulte un coût de lancement* C_i *auquel il convient d'ajouter un coût d'adaptation* a_{ji} *pour tout besoin* B_j *qui lui est affecté.*

Ce problème est la formulation théorique d'un problème d'implantation d'entrepôts, de choix de systèmes permettant de satisfaire un ensemble de besoins, etc...

Cet article décrit les diverses transformations permettant de réduire le problème sous une forme réduite appelée forme canonique mettant en évidence des arbitrages nécessaires à l'obtention d'une solution. Ces choix effectués selon un principe de séparation conduisent à la mise en œuvre d'une procédure heuristique et d'une méthode SEP de résolution.

I. — ENONCE DU PROBLEME

La méthode exposée permet de résoudre le problème $\mathcal{T}$ d'affectation suivant :

— Un ensemble d'activités A_i $(i = 1, ..., I)$ peut être utilisé pour satisfaire les besoins B_j $(j = 1, ..., J)$, une activité A_i pouvant satisfaire plusieurs besoins B_j. Le coût d'une solution est formé d'un coût fixe C_0, de la somme des coûts de lancement des activités utilisées et de la somme des coûts d'adaptation des couples — activité-besoin-retenus ; on se propose de minimiser ce coût et de trouver une solution dite « optimale ».

Le problème peut être mis sous la forme d'un programme linéaire en nombres entiers :

Minimiser $$z = C_0 + \sum_{i \in I} y_i C_i + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} x_{ji} a_{ji}$$

avec $$C_i \geqslant 0, \; a_{ji} \geqslant 0$$

(1) Centre Interarmée de Recherche Opérationnelle.

sous les contraintes

$$\begin{cases} x_{ji} \leqslant y_i & \forall\, i \in I, \quad \forall j \in J \\ \sum\limits_{i \in I} x_{ji} = 1 & \forall\, j \in J \\ x_{ji} = \{0, 1\} \\ y_i = \{0, 1\} \end{cases}$$

Un tel problème est représenté par la matrice $A = \{a_{ji}\}$, le vecteur $C = \{C_i\}$ et le terme constant C_0 (*).

1.1. Forme de la solution

La donnée des activités composant une solution optimale permet de retrouver l'ensemble des affectations optimales. Soit en effet $I' \subset \{1, ..., I\}$ le sous-ensemble d'indices définissant les activités de la solution. On associera à chaque besoin B_j une activité A_p telle que :

$$a_{jp} = \min_{k \in I'} \{ a_{jk} \}$$

1.2. Enoncés résolus

* Si le problème se réduit à un besoin unique B_1 et à un ensemble d'activités A_i, on retiendra l'activité A_k telle que :

$$a_{1k} + c_k = \min_{i \in I} \{ a_{1i} + c_i \}$$

* Un problème dont tous les besoins ont été satisfaits est résolu.

II. — INVARIANCE DE LA SOLUTION

2.1. Règle R1

On n'augmente pas le coût d'une solution si on y introduit une activité A_i dont le coût de lancement est nul.

En effet, on peut rendre la variable y_i égale à 1 ce qui supprime l'ensemble des contraintes $x_{ji} \leqslant y_i$ pour l'indice considéré sans augmenter le coût de la solution, puisque le cœfficient c_i est nul.

2.2. Règle R2

Si une activité A_k est introduite a priori dans une solution, on doit affecter à cette activité les besoins B_j tels que :

$$a_{jk} = \min_{i \in I} \{ a_{ji} \},$$

N.B. Si tous les coefficients a_{ji} et C_i sont non négatifs, C_0 est une borne inférieure du coût de la solution.

ajouter les coûts a_{jk} au terme constant et éliminer les besoins B_j correspondants. Cette opération ne change pas la valeur de la solution.

2.3. Règle R3

Si un besoin B_j est tel que le coût d'adaptation a_{ji} soit indépendant des activités ($a_{j1} = a_{j2} = \dots a_{jI}$), ce coût peut être ajouté au terme constant et tous les termes de la ligne annulés, ce qui revient à éliminer le besoin B_j.

2.3. Règle R4

On ne modifie pas l'affectation optimale si dans la matrice A, on ajoute ou retranche une quantité constante aux éléments d'une même ligne. En effet, pour une solution optimale, un besoin ne reçoit qu'une seule affectation, et quelle que soit cette affectation, le coût de la solution se trouvera affecté de la même valeur lorsque l'on ajoutera ou retranchera une certaine quantité à tous les éléments de la ligne.

2.4. Théorème

Si, pour une ligne j (besoin) de la matrice A, il existe un minimum unique de l'ensemble $\{a_{ji}\}$, correspondant à l'indice K et si l'on note e_j le second minimum ($e_j = \min\limits_{i \in I \quad i \neq K} \{a_{ji}\}$)

a) Si $e_j - a_{jK} > c_K$,
on peut intégrer l'activité A_K dans la solution optimale

b) Si $e_j - a_{jK} < c_K$,
le problème $\mathcal{T}$ a même solution que le problème $\mathcal{T}'$ où l'on a remplacé a_{jK} par e_j et c_K par $c_K - (e_j - a_{jK})$.

Démonstration

a) Considérons une solution S ne contenant pas l'activité A_K. La solution SUA_K obtenue en ajoutant A_K à S est de coût inférieur à celui de S.

En effet, dans S, le besoin B_j est satisfait par une activité A_p telle que

$$a_{jp} \geqslant e_j,$$

si l'on adjoint l'activité A_K, l'affectation (B_j, A_p) est remplacée par l'affectation (B_j, A_K). Le coût devient :

$$Z_{SUA_K} = Z_S + (c_K + a_{jK}) - a_{jp}$$

Comme $a_{jp} \geqslant e_j$ et $e_j - a_{jK} > c_K$, nous obtenons

$$Z_{SUA_K} < Z_S$$

b) Soit S une solution de $\mathcal{T}$ ne contenant pas l'activité A_K :

Cette solution, appliquée à $\mathcal{T}'$, a même coût.

Considérons une solution T optimale de $\mathcal{T}$ contenant l'activité A_K. Si B_j lui est affecté, on peut mettre Z_T sous la forme

$$Z_T = Z_{T'} + (C_K + a_{jK})$$

On aurait obtenu le même coût si a_{jK} avait été remplacé par e_j et C_K par $C'_K = C_K - e_j + a_{jK}(C'_K > 0)$

Ce résultat permet d'introduire la règle R5.

2.5. Règle R5

On ne modifie pas la solution d'un problème d'affectation si, étant donnée une activité A_K telle que a_{jK} soit le minimum unique de l'ensemble $\{a_{ji}/i \in I\}$ et telle que $e_j = \min\{a_{ji}/i \neq K\}$, on remplace

$$a_{jK} \text{ par } e_j \text{ et } C_K \text{ par } C_K - e_j + a_{jK} \text{ si } C_K > e_j - a_{jK}$$
$$a_{jK} \text{ par } a_{jK} + C_K \text{ et } C_K \text{ par } 0 \text{ si } C_K \leqslant e_j - a_{jK}$$

III. — MISE DU PROBLÈME SOUS FORME CANONIQUE

Définissons un ensemble de transformations associées aux règles précédentes et conduisant à la mise sous forme canonique du problème.

$\mathcal{T}_1$ introduction dans la solution des activités de coût nul,

$\mathcal{T}_2$ élimination des besoins dont le coût d'adaptation est minimum pour les activités déjà introduites dans la solution.

$\mathcal{T}_3$ élimination des besoins dont le coût d'adaptation est constant pour toutes les activités.

$\mathcal{T}_4$ transformation des lignes par soustraction du plus petit élément de la ligne.

$\mathcal{T}_5$ application de la règle R5 pour les besoins ayant un coût d'adaptation minimum unique.

$\mathcal{T}_6$ reprise des quatre premières transformations si la cinquième a été effectivement appliquée.

3.1. Propriétés de la forme canonique

Ses propriétées sont les suivantes :

a) Sur une ligne j, il existe au moins deux coefficients a_{ji} égaux au minimum.

b) Les coefficients d'une ligne j prennent au moins 2 valeurs différentes, sinon, il serait possible d'éliminer le besoin B_j selon la règle R3.

c) Les coefficients a_{ji}, égaux au minimum, ne correspondent pas à des activités de coût nul.

3.2. Exemple de mise sous forme canonique

Considérons le problème défini par :

$$\begin{array}{rc} & \text{activité } i \\ \begin{array}{r} A = \\ \text{besoins } j \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 12 & 8 & 15 & 10 \\ 2 & 8 & 5 & 11 & 9 \\ 8 & 5 & 5 & 6 & 10 \\ 4 & 13 & 5 & 13 & 6 \\ 6 & 13 & 3 & 10 & 3 \\ 9 & 10 & 4 & 4 & 7 \\ 11 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C_i = [\, 30 \quad 2 \quad 40 \quad 15 \quad 10 \,]$$
$$C_0 = 0$$

$\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ ne s'appliquent pas
$\mathcal{T}_4$ s'applique et conduit à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 5 & 12 & 7 \\ 0 & 6 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 9 & 1 & 9 & 2 \\ 3 & 10 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = [\, 30 \quad 2 \quad 40 \quad 15 \quad 10 \,]$$
$$C_0 = 27$$

$\mathcal{T}_5$ peut être appliqué aux lignes 1, 2, 4, 7, 8 et conduit à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 5 & 12 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 9 & 1 & 9 & 2 \\ 3 & 10 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = [\, 21 \quad 0 \quad 36 \quad 15 \quad 10 \,]$$
$$C_0 = 27$$

Les transformations $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ s'appliquent. On obtient la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 5 & 12 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 9 & 7 \\ 1 & 9 & 1 & 9 & 2 \\ 3 & 10 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = [21 \quad 0 \quad 36 \quad 15 \quad 10]$$

$$C_0 = 33$$

A_2 a été associée à B_3, B_7, B_8, B_9

$\mathcal{T}_4$ donne

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = [21 \quad 0 \quad 36 \quad 15 \quad 10]$$

$$C_0 = 42$$

Ces derniers tableaux représentent la forme canonique de la solution. Elle montre que sur 9 besoins, 4 ont pu être affectés a priori et qu'une activité, A_2, fait partie de l'optimum.

IV. — CONDITION NECESSAIRE POUR QUE DEUX ACTIVITES APPARTIENNENT A UNE SOLUTION OPTIMALE

S étant un ensemble d'activités, nous désignerons par Z_S le coût minimal des solutions formées à partir de l'ensemble S.

4.1. Théorème

Une condition nécessaire pour que deux activités A_1 et A_2 appartiennent à l'optimum est

$$Z_{A_1} > Z_{A_1 U A_2}$$

$$Z_{A_2} > Z_{A_1 U A_2}$$

Démonstration

1. Soient S et T, deux sous-ensembles tels que $S \subset T$, et une activité A_i.

$$Z_S - Z_{SUA_i} \geqslant Z_T - Z_{TUA_i}$$

Car si un besoin B_j affecté à une activité A_K de T devient affecté à l'activité A_i de TUA_i, la différence $Z_T - Z_{TUA_i}$ subit un gain $a_{jK} - a_{ji}$.

Si ce besoin était affecté à une activité A_p de S, telle que $a_{jp} \geqslant a_{jK}$ l'adjonction de A_i à cet ensemble S inclus dans T ferait subir à la différence $Z_S - Z_{SUA_i}$ un gain $a_{jp} - a_{ji}$ tel que $a_{jp} - a_{ji} > a_{jK} - a_{ji}$.

2. Soient A_1 et A_2, deux activités appartenant à l'ensemble optimal V. On peut poser

$$V = WUA_1$$

avec

$$A_2 \subset W$$

Donc $Z_{A_2} - Z_{A_2 U A_1} \geqslant Z_W - Z_{WUA_1}$

Comme WUA_1 est l'optimum

en définitive

$$Z_{WUA_1} < Z_W$$
$$Z_{A_2 U A_1} > Z_{A_2}.$$

De même, par symétrie :

$$Z_{A_1 U A_2} > Z_{A_1}$$

4.2. Généralisation

Si S est un ensemble d'activités appartenant à l'optimum, une condition nécessaire pour qu'un ensemble d'activités A_i lui appartienne également est que :

$$Z_{SUA_i} < Z_S$$
$$Z_{SUA_i} < Z_{A_i}$$

4.3. Application

L'application des règles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_5$ ayant permis de retenir un ensemble d'activités, il est possible d'utiliser la relation $Z_{SUA_i} < Z_S$ pour éliminer certaines activités et réduire les dimensions du problème.

Reprenons la forme canonique obtenue au paragraphe précédent

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = [21 \quad 0 \quad 36 \quad 15 \quad 10]$$
$$C_0 = 42$$

La solution contient l'activité A_2. Une condition nécessaire pour qu'une activité A_i appartienne à l'opimum est donc $Z_{A_2 U A_i} < Z_{A_2}$

$$Z_{A_2} = 42 + 4 + 3 + 8 + 10 + 6 = 73$$

$$Z_{A_2 U A_1} = 42 + 21 + 3 + 5 = 71$$
$$Z_{A_2 U A_3} = 2 + 36 = 78$$
$$Z_{A_2 U A_4} = 42 + 15 + 4 + 3 + 8 + 7 = 79$$
$$Z_{A_2 U A_5} = 42 + 10 + 2 + 3 + 1 + 3 = 61$$

La solution optimale peut contenir, outre A_2, les activités A_1 et A_5. Comme le lancement simultané de A_2, A_1 et A_5 coûte déjà plus que $Z_{A_2 \cup A_5}$, l'optimum est obtenu avec A_2 et A_5.

V. — ARBORESCENCE SUR LES SOLUTIONS

Décomposons l'ensemble des activités d'un problème Q, mis sous forme canonique, en un sous-ensemble contenant l'activité A_K et un sous-ensemble ne la contenant pas. On forme ainsi 2 sous-problèmes :

— Q_1 où le coût C_K de l'activité A_K est annulé après avoir été ajouté au terme constant C_0,

— Q_2 d'où l'activité A_K a été supprimée, le terme constant restant inchangé.

Dans le sous-problème Q_1, les besoins dont le coût d'adaptation est minimum pour A_K peuvent être affectés et éliminés. Quant au sous-problème Q_2, on peut également lui appliquer les règles de transformation canonique. Si l'on ne peut pas mettre une solution immédiatement en évidence, les activités associées aux sous-problèmes sont à nouveau décomposées. Le chemin vers les solutions est donc représentable par un arbre dont les sommets sont les problèmes générés et où les arcs sont associés au fait de retenir ou d'abandonner un sommet.

Exemple de résolution

Soit le problème Q suivant :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} A1 & A2 & A3 & A4 & A5 \end{array} \\
A = & \left[\begin{array}{ccccc}
3 & 12 & 8 & 15 & 10 \\
2 & 8 & 5 & 11 & 9 \\
8 & 5 & 5 & 6 & 10 \\
4 & 13 & 5 & 13 & 6 \\
6 & 13 & 3 & 10 & 3 \\
9 & 10 & 4 & 4 & 7 \\
11 & 13 & 6 & 5 & 5 \\
7 & 12 & 3 & 7 & 3 \\
5 & 8 & 1 & 7 & 6 \\
2 & 9 & 2 & 10 & 7
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} B1 \\ B2 \\ B3 \\ B4 \\ B5 \\ B6 \\ B7 \\ B8 \\ B9 \\ B10 \end{array}
$$

$$C = [\ 30 \quad 5 \quad 40 \quad 15 \quad 10\ ]$$

$$C_0 = 0$$

Appliquons les transformations $\mathcal{T}$. On obtient :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A1 & A2 & A3 & A4 & A5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C = [21 \quad 5 \quad 36 \quad 15 \quad 10]$$

$$C_0 = 45$$

Le problème est sous forme canonique. Opérons une séparation sur $A3$. On obtient :

$$Q1 \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} A1 & A2 & A3 & A4 & A5 \end{array} \\ \begin{array}{c} B1 \\ B2 \\ B3 \\ B4 \\ B5 \\ B6 \\ B7 \\ B8 \\ B9 \\ B10 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C^1 = [21 \quad 5 \quad 0 \quad 10 \quad 15]$$

$$C_0^1 = 81$$

$$Q2 \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} A1 & A2 & A4 & A5 \end{array} \\ \begin{array}{c} B1 \\ B2 \\ B3 \\ B4 \\ B5 \\ B6 \\ B7 \\ B8 \\ B9 \\ B10 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 7 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 3 \\ 6 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C^2 = [21 \quad 5 \quad 10 \quad 15]$$

$$C_0^2 = 45$$

$Q1$ et $Q2$ ne sont plus sous forme canonique. En appliquant les transformations $\mathcal{C}$ ils deviennent :

$Q1$

$$\begin{array}{c} \\ B7 \end{array}\begin{array}{ccccc} A1 & A2 & A3 & A4 & A5 \\ \end{array}$$
$$B7\ [\ 6 \quad 8 \quad 1 \quad 0 \quad 0\ ]$$

$$C^1 = [\ 21 \quad 5 \quad 0 \quad 10 \quad 15\ ]$$

$$C_0^1 = 81$$

$Q2$

$$\begin{array}{c|cccc} & A1 & A2 & A4 & A5 \\ \hline B1 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ B2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ B3 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ B4 & 0 & 7 & 7 & 0 \\ B5 & 0 & 7 & 4 & 0 \\ B6 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ B7 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ B8 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ B9 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ B10 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$C^2 = [9 \quad 4 \quad 7 \quad 8\ ]$$

$$C_0^2 = 68$$

Le problème $Q1$ est mis sous forme résoluble. Sa solution correspond à :

$\{A3\}$ tout seul, le coût est 82

$Q2$ doit être réarbitré puisqu'il est de nouveau sous forme canonique.

Arbitrons sur $A5$ en formant $Q3$ et $Q4$.

$Q3$

$$\begin{array}{c|cccc} & A1 & A2 & A4 & A5 \\ \hline B1 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ B2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ B3 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ B4 & 0 & 7 & 7 & 0 \\ B5 & 0 & 7 & 4 & 0 \\ B6 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ B7 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ B8 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ B9 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ B10 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$C^3 = [\ 9 \quad 4 \quad 7 \quad 0\ ]$$

$$C_0^3 = 76$$

$Q4$

$$\begin{array}{c|ccc} & A1 & A2 & A4 \\ \hline B1 & 0 & 2 & 5 \\ B2 & 0 & 0 & 3 \\ B3 & 2 & 0 & 0 \\ B4 & 0 & 7 & 7 \\ B5 & 0 & 7 & 4 \\ B6 & 2 & 3 & 0 \\ B7 & 6 & 8 & 0 \\ B8 & 0 & 5 & 0 \\ B9 & 0 & 2 & 1 \\ B10 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

$$C^4 = [\ 9 \quad 4 \quad 7\ ]$$

$$C_0^4 = 68$$

En passant aux formes canoniques, il reste :

$Q3$

$$\begin{array}{c} \\ B2 \\ B3 \end{array}\begin{array}{cccc} A1 & A2 & A4 & A5 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & A1 & A2 & A4 & A5 \\ B2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ B3 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

$C^3 = [\,9 \quad 4 \quad 7 \quad 0\,]$

$C_0^3 = 76$

$Q4$

$$\begin{array}{cccc} & A1 & A2 & A4 \\ C^4 = & [\,0 & 4 & 0\,] \end{array}$$

$C_0^4 = 84$

Le problème $Q4$ est résolu, la solution est $\{A1,\ A4\}$

On peut arbitrer $Q3$ sur $A2$ donnant $Q5$ et $Q6$

$Q5$

$$\begin{array}{cccc} A1 & A2 & A4 & A5 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
$$[\,9 \quad 0 \quad 7 \quad 0\,]$$
$$C_0^5 = 80$$

$Q6$

$$\begin{array}{ccc} A1 & A4 & A5 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
$$[\,9 \quad 7 \quad 0\,]$$
$$C_0^6 = 76$$

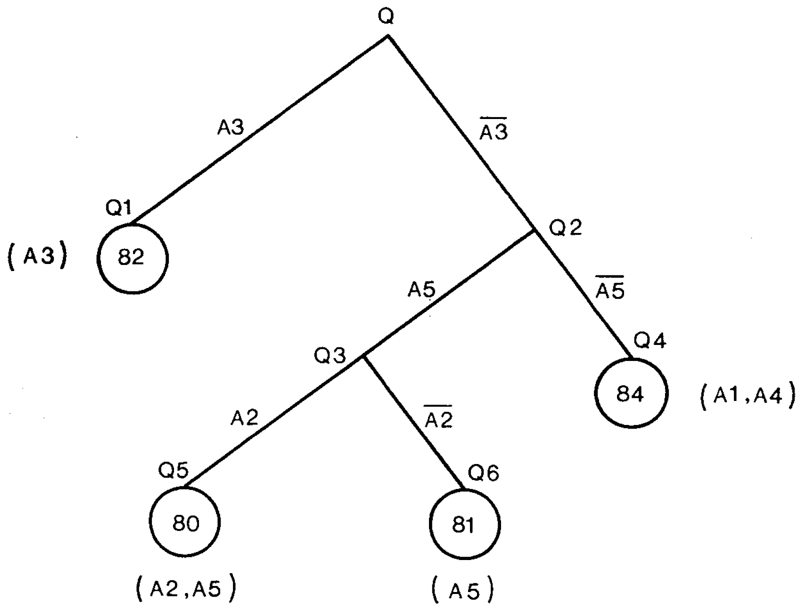

Figure A.

L'application des transformations $\mathcal{T}$ montre que :

$Q5$ est résolu :

$\{A2, A5\}$ dont le coût est 80

$Q6$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_0^6 = 79$

$Q6$ est résolu :

$\{A5\}$ dont le coût est 81

Au total, on a trouvé une suite d'arbitrages et de solutions représentables par une arborescence (figure A).

VI. — PROCEDURE HEURISTIQUE

Pour définir une procédure heuristique il faut disposer d'une règle permettant de choisir après un arbitrage lequel des deux sous-programmes générés sera développé, et lequel sera abandonné. Il faut aussi disposer d'une règle permettant de choisir quel nouvel arbitrage sera opéré. Ces règles peuvent être liées. Ainsi, faisons correspondre à chaque problème une évaluation par défaut de son coût, c'est-à-dire le terme constant C_0 ou, ce qui est une meilleure évaluation, $C_0 + \min C_i$), et convenons de développer le problème dont l'évaluation par défaut est la plus faible.

Notons $\varepsilon(Q)$ l'évaluation par défaut du coût du problème Q, et Q_{A_i} et $Q_{\bar{A}_i}$, les problèmes déduits de Q selon que l'activité A_i est incluse ou non dans la solution. $\varepsilon(Q_{A_i})$ et $\varepsilon(Q_{\bar{A}_i})$ sont les évaluations de ces 2 problèmes, après leur mise sous forme canonique.

Pour toutes les alternatives $\{A_i, \bar{A}_i\}$ on calcule la différence :

$$\mathcal{F}(Q_{A_i}) = \varepsilon(Q_{A_i}) - \varepsilon(Q_{\bar{A}_i})$$

On retient l'alternative pour laquelle cette différence est maximale en valeur absolue, et pour cette alternative, le problème dont l'évaluation est la plus faible.

Organigramme de la Méthode heuristique

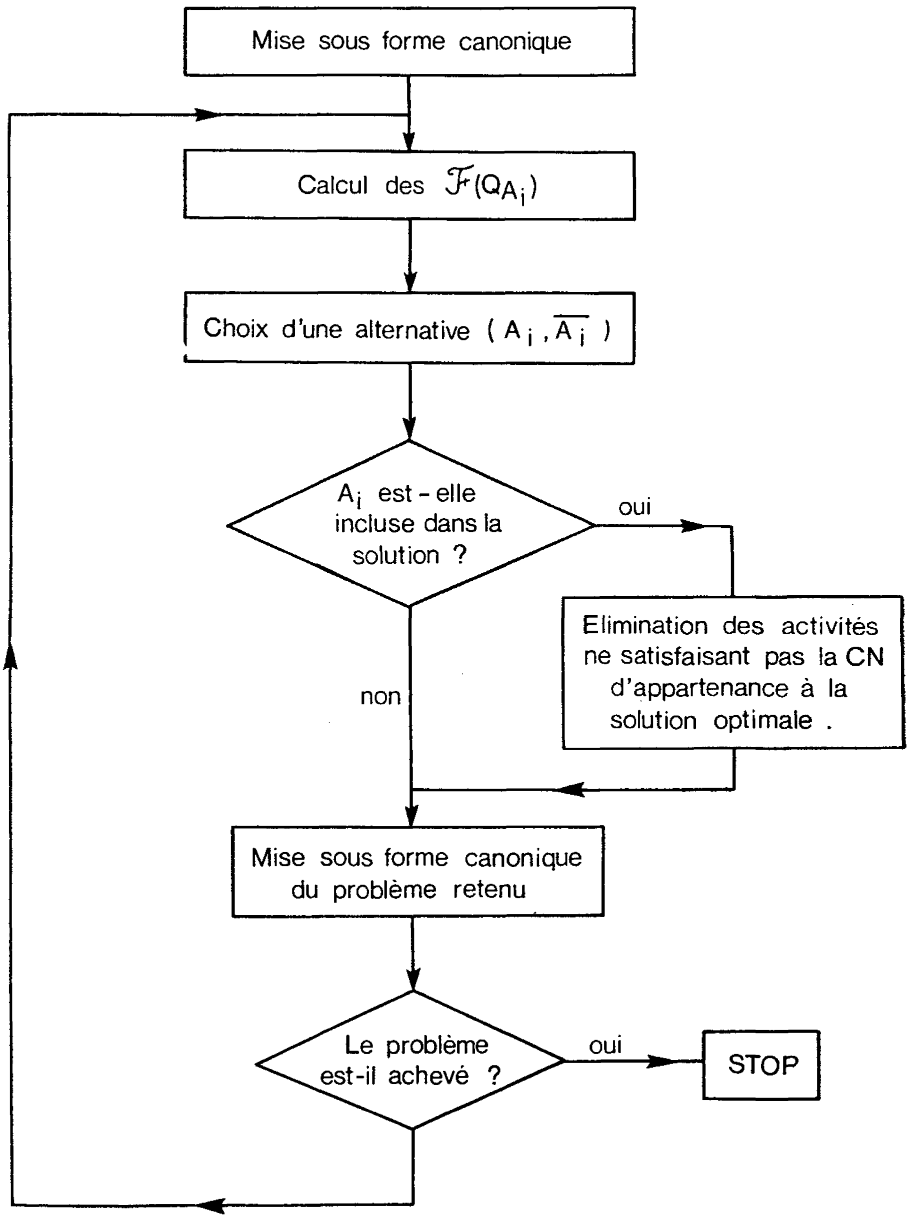

Figure B.

VII. — PROGRAMMATION DE L'ALGORITHME

L'algorithme de la procédure heuristique a été programmé sur calculateur. On a obtenu un programme LILAS (1) dont les caractéristiques sont les suivantes :

Temps d'exécution : Le temps d'exécution est fonction au premier chef du nombre de fois où la procédure de séparation est appliquée pour que la solution soit obtenue. Il dépend donc surtout du nombre d'activités. Voici quelques temps d'exécution sur UNIVAC 1108 :

8 activités	20 besoins	8 secondes
8 activités	500 besoins	10 secondes
20 activités	500 besoins	175 secondes
20 activités	1 000 besoins	180 secondes

Encombrement :

L'encombrement résulte de la mise en mémoire centrale des principaux tableaux de travail. Si NA est le nombre d'activités, NB le nombre de besoins, il faut réserver :

$$2\ \mathrm{NA} \bullet \mathrm{NB} + 7\ \mathrm{NA} + 4\ \mathrm{NB} \text{ mots soit}$$

45 000 mots pour 20 activités et 1 000 besoins

62 000 mots pour 1 000 activités et 300 besoins

(1) Le programme peut être communiqué sur demande.