

ANDREI J. SIMION

**Une procédure pour le calcul du flot optimal  
dans un réseau antisymétrique**

*Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche  
opérationnelle. Recherche opérationnelle*, tome 5, n° V3 (1971),  
p. 77-81.

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1971\\_\\_5\\_3\\_77\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1971__5_3_77_0)

© AFCET, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UNE PROCEDURE POUR LE CALCUL DU FLOT OPTIMAL DANS UN RESEAU ANTISYMETRIQUE

par Andrei J. SIMION (1)

Résumé. — *L'article se propose la description d'une nouvelle procédure du calcul du flot optimal dans les réseaux antisymétriques. Cette procédure tend à utiliser principalement une seule matrice et par conséquent semble plus avantageuse que la procédure habituelle de Ford-Fulkerson [2], du point de vue de la programmation.*

*Le présent travail procède des mêmes idées que Oprescu [3], dont la méthode n'aboutissait malheureusement pas à la détermination du flot optimal [4].*

*La première partie de l'article contient les notations utilisées, tandis que la seconde décrit et démontre la procédure proposée ; enfin, dans la troisième partie est donné le schéma logique.*

## 1. INTRODUCTION

On indiquera ici les notions nécessaires pour formuler et démontrer la procédure proposée dans la seconde partie de l'article.

Soit  $G(P, U)$  un graphe fini sans boucle, où l'on associe à chaque arc  $U_{ij}$ , qui joint les sommets  $P_i$  et  $P_j$ , un nombre  $C_{ij} \geq 0$ , nommé la capacité de l'arc  $U_{ij}$ , et où il n'existe qu'un seul point d'entrée  $P_1$  et un seul point de sortie  $P_n$ .

Pour trouver un flux optimal, il faut déterminer les nombres  $X_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), de manière que :

$$(1) \quad \varphi = \sum_j X_{1j} \text{ soit maximal;}$$

$$(2) \quad \sum_j (X_{ij} - X_{ji}) = 0, (i = 2, 3, \dots, n - 1);$$

$$(2') \quad 0 \leq X_{ij} \leq C_{ij}.$$

Si l'on a seulement les conditions (2) et (2'), il existe un *flot*.

Si pour un sommet  $P_i$  on a (2), on dit que le sommet  $P_i$  est *équilibré*.

---

(1) Université de Bucarest.

Une *chaîne* est une séquence d'arcs qui ont deux à deux une extrémité commune et un *chemin* est une chaîne où l'extrémité terminale d'un arc coïncide avec l'extrémité initiale de l'arc suivant.

Une *coupe* est un ensemble d'arcs  $S \subseteq U$  de manière que, pour chaque chemin  $\alpha$ , qui joint  $P_1$  à  $P_n$ , on ait :

$$(3) \quad S \cap \alpha \neq \emptyset.$$

Si l'on note  $C(S) = \sum_{U_{ij} \in S} C_{ij}$ , la capacité de la coupe  $S$ , on a évidemment  $C(S) \geq \varphi$ , conformément à la relation (3).

Par conséquent si l'on trouve un flot et une coupe de manière que  $\varphi = C(S)$ , alors le flux  $\varphi$  est optimal. C'est l'idée qui sera utilisée pour formuler la procédure proposée.

## 2. LA PROCEDURE

On suppose que le réseau est antisymétrique, c'est-à-dire que :

$$U_{ij} \in U \Rightarrow U_{ji} \notin U.$$

Si  $U_{ij} \in U$ , alors  $P_i$  est l'extrémité initiale de l'arc  $U_{ij}$  et  $P_j$  l'extrémité terminale.

Soit  $C = \|C_{ij}\|$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  la matrice des capacités. Si  $U_{ij}$  n'existe pas, alors  $C_{ij} = 0$ . Soit  $A = C$ . On transformera la matrice  $A$  jusqu'à obtenir le flot optimal. Pour cela nous utiliserons deux vecteurs :  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  et  $V = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ .

Soit  $u_1 = 0$  et  $V_1 \geq \max_j C_{1j}$ . Ainsi, on a marqué le sommet  $P_1$ . On marque les autres sommets comme suit : on sélectionne un sommet  $P_i$ , qui a été marqué et n'a pas été choisi antérieurement, et l'on marque les sommets qui sont adjacents au sommet  $P_i$  pour lesquels  $a_{ij} \neq 0$  de la manière suivante :

$$u_j = i, V_j = \min(V_i, |a_{ij}|).$$

On continue jusqu'à marquer la sortie  $P_n$ . Si l'on ne peut pas marquer la sortie, la procédure est terminée. Si la sortie a été marquée, nous avons trouvé une chaîne  $\alpha$  qui joint  $P_1$  et  $P_n$ .

On transforme les quantités pour lesquelles  $U_{ij} \in \alpha$  de la manière suivante :

— si  $a_{ij} > 0$ , alors :

$$(4) \quad a_{ij} := a_{ij} - V_n, a_{ji} := a_{ji} - V_n;$$

— si  $a_{ij} < 0$ , alors :

$$(5) \quad a_{ij} := a_{ij} + V_n, a_{ji} := a_{ji} + V_n.$$

Puis on continue à appliquer la procédure à la matrice ainsi obtenue. Évidemment, le nombre d'itérations est fini, parce que  $V_n > 0$ .

### Lemme 1

Soit  $V \in U$ . Si  $V = U_{ij}$ , alors après chaque itération nous obtenons :

$$(6) \quad a_{ij} \geq 0, a_{ji} \leq 0$$

$$(7) \quad |a_{ij}| + |a_{ji}| = C_{ij}$$

*Démonstration.* Initialement  $a_{ij} = C_{ij} \geq 0$ . Si l'on trouve une chaîne  $\alpha$ , on a  $V_n = \min_{U_{ij} \in \alpha} |a_{ij}|$  et par conséquent l'application des transformations (4) et

(5) ne changera pas la relation (6).

La relation (7) résulte de la relation (6) parce que le graphe est antisymétrique.

### Lemme 2

Si l'on considère seulement les valeurs  $a_{ij} \leq 0$ , chaque sommet est équilibré après chaque itération.

*Démonstration.* Évidemment, initialement les sommets sont équilibrés par rapport aux valeurs  $a_{ij} \leq 0$ . On suppose qu'après un nombre quelconque d'itérations les sommets sont équilibrés et on montre que cette propriété reste valable après une nouvelle itération.

En effet, par l'application des relations (4) et (5), les sommets  $P_i \in \alpha$ , où  $\alpha$  désigne la chaîne considérée, se déséquilibrent et se rééquilibrent et, par conséquent, à la fin, tous les sommets sont équilibrés par rapport aux valeurs  $a_{ij} \leq 0$ .

Considérons alors la matrice  $A$  lorsqu'on ne peut plus marquer la sortie  $P_n$ . Soit  $T$  l'ensemble des arcs marqués seulement à une extrémité. On transforme la matrice  $A$  ainsi :  $X := (-A)^*$ ,  $Y^*$  désignant la transposée de la matrice  $Y$ .

### Théorème

Les valeurs  $X_{ij} \geq 0$  représentent un flot optimal.

*Démonstration.*

a) La relation (2) résulte du lemme 2 et (2') résulte de (7). Par conséquent, il existe un flot.

b) Soit  $U_{ij} \in T$  un arc marqué seulement à une extrémité. Si le sommet marqué est  $P_i$  alors  $a_{ij} = 0$  et, conformément au lemme 1,  $a_{ji} = -C_{ij}$  et par conséquent :

$X_{ij} = C_{ij}$ . Si le sommet marqué est  $P_j$ , alors on n'obtient pas de valeur  $X_{ij} > 0$ .

Soit  $S \subseteq T$ , où  $U_{ij} \in S \Leftrightarrow X_{ij} = C_{ij}$ .

Si l'on considère seulement les arcs  $U_{ij}$  pour lesquels  $X_{ij} > 0$ , alors évidemment  $S$  est une coupe (la démonstration se fait en supposant le contraire, et alors on trouve une chaîne qui joint les sommets  $P_1$  et  $P_n$  de manière que toutes les valeurs  $a_{ij}$  sont différentes de zéro pour  $U_{ij} \in \alpha$ , où  $\alpha$  désigne la chaîne trouvée).

Aussi, chaque chemin  $\alpha$  qui joint  $P_1$  et  $P_n$  contient seulement un arc de  $S$  (la démonstration se fait en supposant contraire).

Par conséquent  $\varphi = \sum_{U_{ij} \in S} X_{ij} = C(S)$ .

Donc les valeurs  $X_{ij} \geq 0$  représentent un flot optimal.

C.Q.F.D.

### 3. LE SCHÉMA LOGIQUE

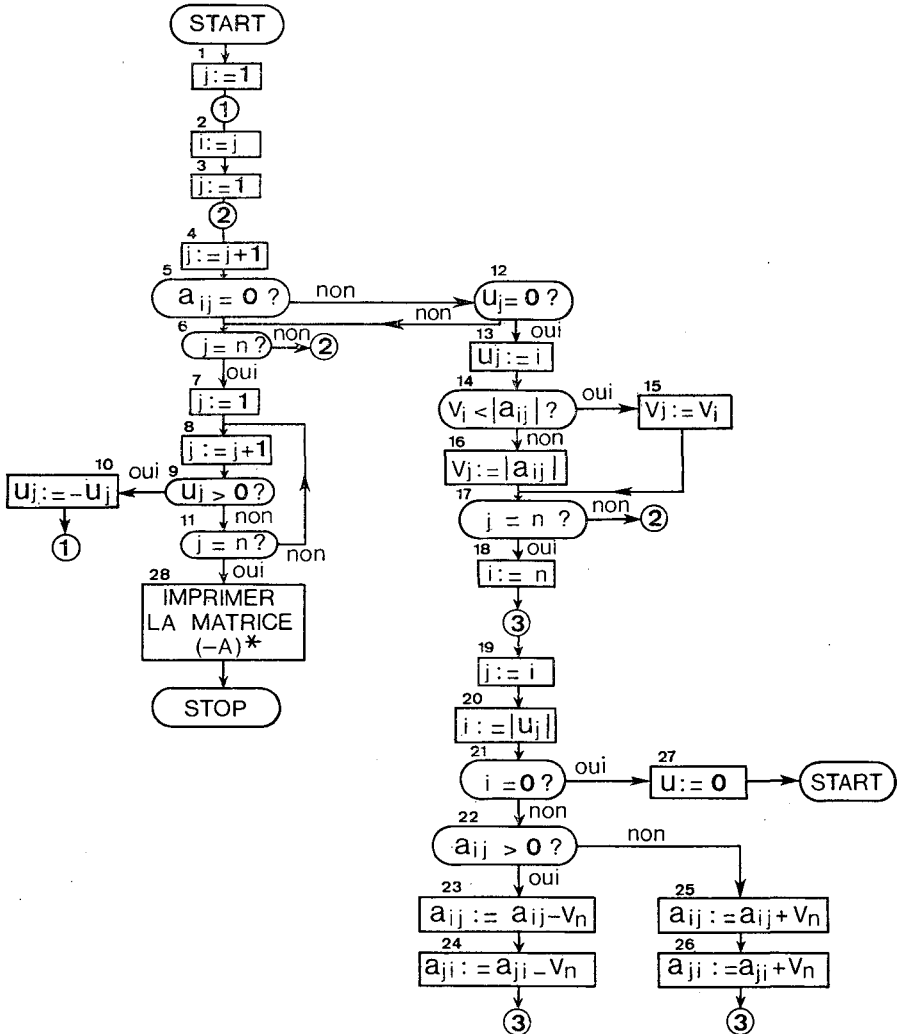


Figure 1

Dans le schéma logique ne se trouve pas le calcul de  $V_1$  parce qu'il suffit d'enregistrer  $V_1 \geq \max_j C_{1j}$ . Aussi, initialement  $u = 0$ .

Les blocs 1-17 permettent de chercher une chaîne qui joigne l'entrée à la sortie.

Les blocs 18-26 réalisent les transformations (4) et (5).

Le bloc 27 fait  $u = 0$  et envoie à la recherche d'une nouvelle chaîne.

Le dernier bloc 28 ordonne l'impression du résultat.

Les éléments positifs de la matrice imprimée représentent le flot optimal.

### CONCLUSIONS

La procédure proposée devrait assurer l'accroissement de la vitesse de calcul et une économie de mémoire car on travaille principalement sur la seule matrice du graphe.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Paris, 1958.
- [2] L. R. FORD et D. R. FULKERSON, « Maximal flow through a network », *Canad. J. of Math.*, 8, 1956, p. 399.
- [3] M. F. A. OPRESCU, « Le calcul du flux optimum dans un réseau par la méthode des compensations successives », *R.I.R.O.* V-1, 1969, p. 39.
- [4] M. ANCIAUX, P. HANSEN, « Commentaires sur la méthode des compensations successives », *R.I.R.O.*, V-3, 1970, p. 11.