Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

Roger Guesnerie

Sur l'usage de la notion de probabilités subjectives

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 6, n° V1 (1972), p. 31-46.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1972__6_1_31_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, N° V-1, 1972, p. 32-46)

SUR L'USAGE DE LA NOTION DE PROBABILITES SUBJECTIVES

par Roger GUESNERIE (1)

Résumé. — *On se propose d'examiner, à la lumière de l'axiomatique de Savage, les fondements logiques d'un critère de choix en avenir incertain, précédemment proposé dans un article de cette revue* [4].

Les auteurs batissaient leur critère en partant d'un sous-ensemble du simplexe de R^n, qu'ils suggéraient d'interpréter comme « l'ensemble des probabilités entre lesquelles le décideur ne savait pas choisir ». On montre que cette interprétation n'est pas cohérente avec la conception Savagienne des probabilités subjectives. Le critère de choix en question induit en effet un préordre complet sur les événements (au sens de Savage) qui devrait être compatible — d'une manière que l'on précise — avec le sous-ensemble de « probabilités » dont on est sensé partir : on montre que cette condition de compatibilité n'est vérifiée que par une classe très particulière de sous-ensembles du simplexe, classe qu'on exhibe, à partir de l'étude des « points fixes » d'une certaine transformation.

INTRODUCTION

L'ouvrage de SAVAGE *Fondations of Statistics* parachève un long effort de réflexion sur la théorie des choix en avenir incertain, en présentant les fondements logiques du critère de « l'espérance mathématique ». Simultanément il fonde, en lui donnant un sens précis, la notion de probabilité personnelle ou subjective (2).

La mise en place du concept de probabilité personnelle, d'une part, et la justification de l'emploi de l'espérance mathématique d'autre part, ne sont pas deux constructions indépendantes, mais sont dans le corps de la théorie étroitement imbriquées : tous les axiomes (excepté l'axiome 7 qui est mineur) interviennent pour permettre la définition d'un système de probabilités quantitatives; l'axiome 5 pour bâtir un préordre sur les événements, les axiomes 2, 3, 4 pour montrer que ce préordre est une probabilité qualitative; l'axiome 6,

(1) CEPREMAP. Paris.
(2) Voir [5]. Pour des commentaires ou des développements voir [1], [3], [5] et [10].

pour que cette probabilité qualitative soit fine et serrée. Il y a dans la théorie une seule démarche dont procèdent l'un et l'autre de ses aspects.

En fait, couramment, la notion de probabilité subjective est utilisée, sans référence au critère de l'espérance mathématique. C'est sur l'ambiguïté d'un tel usage courant, ambiguïté suggérée par les remarques précédentes, que l'on voudrait s'attarder.

Pour cela on examinera dans cette note, un critère de choix en avenir incertain, proposé récemment par MM. Fourgeaud, Sentis et Lenclud (1).

Les auteurs proposent, dans le cas où le nombre des états de la nature est fini, une manière d'intégrer dans les choix, des connaissances sur la vraisemblance des événements. L'information exogène conduit le décideur à restreindre les probabilités possibles des événements à un certain sous-ensemble du simplexe. Le critère proposé s'identifie lorsque l'information est complète (probabilité bien définie) à l'espérance mathématique. Par contre lorsque l'information est nulle, on retrouve le critère minimax.

Ainsi formellement on a une généralisation des critères existants : espérance mathématique et minimax apparaissant comme des cas particuliers du nouveau critère.

On se propose de montrer ici, qu'en fait, la conception du critère est étrangère à celle de Savage, et qu'en particulier les paramètres ayant les propriétés de probabilités définies de « façon non unique », introduits par les auteurs, ne peuvent être interprêtés comme des probabilités personnelles, au sens précis donné à ce terme dans « Foundations of statistics ».

Auparavant, on rappellera le critère en question, et certains concepts introduits par Savage.

I. LE CRITERE

Les états de la nature en nombre n, fini $(s_1, \ldots, s_n)$ forment un ensemble noté S. L'ensemble des sous-ensembles de S, constituent l'algèbre $\mathcal{A}$ des événements.

Un acte $\underline{f}$ est ici défini, comme une application de S dans R,

$$\underline{f} \begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(s) = f_i \quad s = s_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Dans ce cas simple, les f_i sont les « niveaux d'utilité » auquel l'acte conduit, dans chacun des états de la nature.

(1) C. Fourgeaud, B. Sentis, Ph. Lenclud, *R.I.R.O.* n° 14, op. cité [4], 1968.

Soit S^n, le simplexe de R^n : $S^n \left\{ \vec{p} \mid \sum_1^n p_i = 1, p_i \geqslant 0 \right\}$.

Soit K un sous-ensemble de S^n.

On peut définir un « critère de choix en avenir incertain », c'est-à-dire un préordre complet sur les actes, de la façon suivante

$$\underline{f} \leqslant \underline{g} \Leftrightarrow \inf_{\vec{p} \in K} \sum_i p_i f_i \leqslant \operatorname{Inf}_{\vec{p} \in K} \sum_i p_i g_i \qquad (1)\ (^1)$$

Le critère défini par la relation (1) ci-dessus, sera dit critère du « minimum de l'espérance mathématique » (2).

— Si K est réduit à un point $\vec{p}^0$, les actes f et g sont classés comme $\sum_i p_i^0 f_i$ et $\sum p_i^0 g_i$, c'est-à-dire selon l'espérance mathématique de gains avec le système de probabilités $\vec{p}_0$.

— Si K est au contraire le simplexe tout entier, $\underline{f}$ et $\underline{g}$ sont classés dans le même ordre que les nombres $f_{i1} = \operatorname{Min}_i f_i$ et $g_{i2} = \operatorname{Min}_i g_i$

Puisque $\operatorname{Inf}_{\vec{p} \in S^n} \left\{ \sum_i p_i f_i \right\} = \operatorname{Min} f_i$

comme il est facile de le voir.

L'espérance mathématique et le maximin apparaissent donc bien comme 2 cas-limites du critère.

Il paraît naturel de considérer K comme le domaine des probabilités que le décideur juge plausible, mais entre lesquelles il ne sait pas choisir. K traduirait une information sur les probabilités. Cependant, n'y a-t-il pas contradiction à supposer une information, nécessairement subjective, sur les événements décrite en termes de probabilités et à raisonner ensuite à l'aide du maximin?

C'est cette question qu'on essaiera d'éclairer, en confrontant le critère à la conception de Savage des probabilités personnelles. Mais d'ores et déjà, l'ambiguïté d'une interprétation de K comme domaine des « probabilités subjectives possibles », apparaît si l'on veut adapter le critère à un nombre d'états de la nature infini.

Les actes sont alors des applications $\mathcal{A}$-mesurables de S dans R (où $\mathcal{A}$ est

---

(1) Dans l'article précité, les auteurs se restreignaient à une certaine classe d'ensembles K, ce qui n'est pas a priori indispensable.

(2) Ce terme a été proposé par P. Malgrange qui a démontré que l'élément maximal du préordre était le même que celui obtenu avec le critère de l'espérance mathématique avec le système de probabilités « le plus défavorable ». Cf. op. cité [8] et [9].

une σ-algèbre de sous-ensembles de S). En transposant simplement la relation (1), le préordre sur les actes serait défini par

$$\underline{f} \leqslant \underline{g} \Leftrightarrow \operatorname*{Inf}_{\mu \in \underline{\bar{K}}} \int f \, d\mu \leqslant \operatorname*{Inf}_{\mu \in \underline{\bar{K}}} \int g \, d\mu$$

($\underline{\bar{K}}$ étant un certain sous-ensemble de $\mathcal{A}$-mesures sur S).

Mais l'on sait que, si le nombre des états de la nature est infini, le système des probabilités quantitatives personnelles est — dans la logique de Savage — unique. Il y a donc contradiction là, à parler de probabilités subjectives et à en considérer un domaine, non réduit à un point, sauf à prendre ce terme dans une autre acception, et donc à envisager une nouvelle construction axiomatique.

Cet argument d'unicité de la probabilité ne vaut plus quand le nombre d'états de la nature est fini, puisqu'alors le raisonnement de Savage n'implique plus nécessairement cette unicité. L'incompatibilité entre la conception de l'incertitude sous-jacente à la prise en compte du domaine K, et la théorie exposée dans *Foundations of Statistics*, subsiste cependant et on en précisera les aspects dans la suite.

Auparavant, rappelons certains résultats et concepts qui seront utiles.

II. RAPPELS : PROBABILITES QUALITATIVES ET QUANTITATIVES

1) Préordre sur les événements

Il est défini par Savage, à partir du préordre sur les actes.

Soient les événements A et B, sous-ensembles de S :

Soient les actes en escalier $\underline{f}_A$ et $\underline{f}_B$

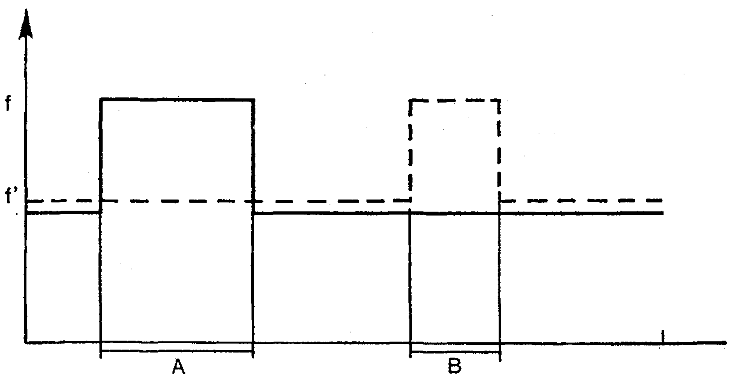

Figure 1

$$\underline{f}_A \begin{cases} \underline{f}_A(s) = f & s \in A \\ \underline{f}_A(s) = f' & s \in A^C \end{cases} \qquad \underline{f}_B \begin{cases} \underline{f}_B(s) = f & s \in B \\ \underline{f}_B(s) = f' & s \in B^C \end{cases}$$

Supposons que $f > f'$. (Ici f et f' sont deux nombres, plus généralement on pourrait considérer 2 actes constants.)

Par définition A est dit non préféré à B (et on note $A \leqslant \cdot B$) si et seulement si, quels que soient f et f' tels que $f > f'$, on a $\underline{f}_A \leqslant \underline{f}_B$.

L'axiome 5 de Savage assure que le préordre sur les événements $\leqslant \cdot$ *est complet :* étant donné deux événements A et B alors ou bien $\underline{f}_A \geqslant \underline{f}_B$ pour tout f et f' tels que $f > f'$, ou bien $\underline{f}_A \leqslant \underline{f}_B$, là encore pour tout f et f' tels que $f > f'$.

2) Probabilité qualitative. Probabilité quantitative compatible

Soit un préordre complet sur les événements noté $\leqslant$.

Ce préordre est appelé *probabilité qualitative,* s'il vérifie la condition d'additivité :

$$\forall\ A, B, C \text{ tel que } A \cap C = B \cap C = \emptyset \quad A \leqslant \cdot B \Leftrightarrow A \cup C \leqslant \cdot B \cup C$$

Une *probabilité quantitative* est une fonction *additive* définie sur les événements

$$\left| \begin{array}{ll} p(A \cup B) = p(A) + p(B) & \forall\ A, B \text{ tel que } A \cap B = \emptyset \\ p(A) \geqslant 0 \quad , \quad p(S) = 1 & \end{array} \right.$$

Une probabilité quantitative est dite *compatible* avec une probabilité qualitative si :

$$\forall\ A, B \qquad A \leqslant \cdot B \Leftrightarrow p(A) \leqslant p(B)$$

3) Probabilité quantitative compatible, dans le cas d'un nombre d'états de la nature fini

Il existe une probabilité quantitative compatible et une seule, si la probabilité qualitative a la propriété d'être « fine » et « serrée » (1).

Si le nombre des états de la nature est fini, la probabilité qualitative ne vérifie pas ces conditions, et le théorème ci-dessus ne s'applique pas.

Il se peut qu'il n'existe aucune probabilité quantitative compatible avec une probabilité qualitative s'appliquant à un nombre fini d'événements. Cependant si la probabilité qualitative vérifie une condition dite « d'additivité étendue » (2), on peut exhiber au moins une probabilité quantitative compatible avec elle, mais rien n'assure qu'il y en a une seule, et en général on en trouvera un ensemble.

Précisons et illustrons ce propos pour n états de la nature : Le nombre d'événements non vides est alors $n + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n - 1$.

(1) Voir *Foundations of Statistics*, op. cité [11] ou Guesnerie-Jaffray [5].
(2) Voir Maitra, op. cité [7].

Les événements peuvent être classés de $(2^n - 1)$! manières différentes (si l'on ne s'intéresse dans le classement qu'au rang de l'événement, sans préciser s'il est équivalent ou strictement inférieur au précédent ([1])).

Parmi les préordres associés il y en a seulement q_n qui sont des probabilités qualitatives. Parmi ces dernières, disons t_n $(t_n \leqslant q_n)$ ([2]) vérifient la condition d'additivité étendue et sont compatibles avec une probabilité quantitative.

La probabilité quantitative (qui est par définition une fonction additive sur les événements) est, dans ce cas fini, complètement caractérisée par les poids $p_1, \ldots, p_n$ qu'elle donne aux événements élémentaires. Appelons F le sous-ensemble des points du simplexe S^n, compatibles avec une certaine probabilité qualitative (compatibles en ce sens que le système des poids associés définit une probabilité quantitative compatible avec la probabilité qualitative).

L'ensemble des sous-ensembles de S^n de type F sera appelée F^n.

Voici un exemple d'un ensemble de F^3.

Soit la probabilité qualitative

$$s_1 <\cdot\, s_2 <\cdot\, s_3 <\cdot\, s_1 \cup s_2 <\cdot\, s_3 \cup s_1 <\cdot\, s_2 \cup s_3 <\cdot\, s \cup_1 s_2 \cup s_3$$

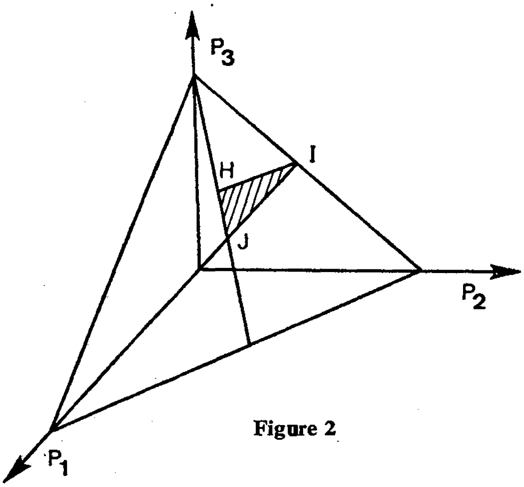

Figure 2

L'ensemble F associé est défini

par les inégalités

$$p_1 < p_2$$
$$p_2 < p_3$$
$$p_3 < p_1 + p_2$$

c'est l'intérieur du triangle HIJ

$$\begin{bmatrix} H & (1/4, & 1/4, & 1/2) \\ I & (0\ , & 1/2, & 1/2) \\ J & (1/3, & 1/3, & 1/3) \end{bmatrix}$$

Les ensembles de la famille F^n ont les propriétés immédiates suivantes :

. Card $F^n = t_n$.

. $F \in F^n$ est convexe, $\bigcup_{F \in F^n} = S^n$.

. Si F_i et F_j sont des éléments distincts de F^n, alors $F_i \cap F_j = \emptyset$.

(3) Il y a beaucoup plus de $(2^n - 1)!$ préordres complets possibles (voir le cas où $n = 3$ dans la suite).

(4) $t_n = q_n$ si $n \leqslant 4$ (Voir Maitra, Definetti, op. cité [5] et [2].

Autrement dit, F^n est une partition de S^n en t_n sous-ensembles convexes non vides.

On fera également intervenir la famille F'^n, définie à partir de F^n par la condition :

$$F' \in F'^n \Leftrightarrow \exists\ F \in F^n \text{ tel que } F' \subseteq \bar{F}$$

F'^n est la famille des sous-ensembles du simplexe dont la fermeture est contenue dans un ensemble $F \in F^n$.

III. LE CRITERE DU MINIMUM DE L'ESPERANCE ET LA THEORIE DES PROBABILITES SUBJECTIVES

Revenons, après cette digression, au critère défini par la relation (1) de I, qui définit un préordre complet sur les actes.

Ce préordre complet sur les actes, induit — c'est la remarque de base de la suite — *un préordre complet sur les événements.*

En effet soient 2 actes de type $\underline{f}_A$ et $\underline{f}_B$ (voir paragraphe II-1/).

On peut alors poser, I_A et I_B étant deux ensembles d'indices :

$$A = \bigcup_{i \in I_A} s_i \quad , \quad B = \bigcup_{s \in I_B} s_i$$

Alors, $f > f' \Rightarrow$

$$\underset{\vec{p} \in K}{\text{Min}}\ \Sigma\, p_i f_{iA} = \left[\underset{\vec{p} \in K}{\text{Min}} \left[\sum_{i \in I_A} p_i\right]\right] f + \left[1 - \underset{\vec{p} \in K}{\text{Min}} \left[\sum_{i \in I_A} p_i\right]\right] f'$$

$\underline{f}_A$ et $\underline{f}_B$ seront donc classés comme les nombres

$$\underset{\vec{p} \in K}{\text{Min}} \left[\sum_{i \in I_A} p_i\right] \text{ et } \underset{\vec{p} \in K}{\text{Min}} \left[\sum_{i \in I_B} p_i\right],$$

c'est-à-dire indépendamment de f et f' tant que $f > f'$ C.Q.F.D.

Ainsi, à tout sous-ensemble K du simplexe, le préordre sur les actes associé au critère du « minimum de l'espérance », définit un préordre sur les événements. On notera celui-ci $\leqslant \cdot_K$

Par l'intermédiaire de $\leqslant \cdot_K$, construisons l'application $K \xrightarrow{\varphi} \varphi(K)$ de l'ensemble des sous-ensembles du simplexe dans lui-même,

$$K \xrightarrow{\varphi} \varphi(K),\ K \rightarrow \leqslant \cdot_K \begin{cases} \text{. Si } \leqslant \cdot_K \text{ n'est pas une probabilité qualitative, ou s'il n'existe pas de probabilité quantitative compatible avec } \leqslant \cdot_K \text{ alors } \varphi(K) = \varnothing \\ \text{. Sinon, } \varphi(K) \text{ est le sous-ensemble des points de } S^n \text{ « compatibles » avec } \leqslant \cdot_K \end{cases}$$

Ainsi $\varphi(K)$ s'il n'est pas vide, est un élément de F^n : c'est l'ensemble des points représentatifs des probabilités quantitatives compatibles avec $\leqslant \cdot_K$.

L'étude de l'application $K \to \varphi(K)$ est évidemment importante pour l'interprétation du domaine K initial. En effet $\varphi(K)$, ensemble des probabilités compatibles avec le préordre sur les événements induit par le critère (qui est en quelque sorte une information ex-post sur les événements) doit être cohérent avec l'information ex-ante qu'est sensé traduire K.

La cohérence est complète quand $K = \varphi(K)$, mais si $\varphi(K) \supseteq K$ la consistance de l'interprétation « subjectiviste » de la région K est suffisante, puisque le type d'incertitude traduit dans K, n'est pas contradictoire mais seulement un peu plus restrictif que celui implicite à $\varphi(K)$.

Nous étudierons donc dans la suite les caractéristiques de la transformation, ou plus spécialement les ensembles invariants tels que $K = \varphi(K)$ et les ensembles « dilatés » $\varphi(K) \supseteq K$.

Une manière générale d'appréhender les rapports entre un critère quelconque et la construction de Savage, est bien sûr de confronter les préordres sur les actes que définit le premier aux axiomes présentés dans la seconde. La mise en évidence du fait que le critère défini en I ne vérifie pas l'axiome 2, éclairera, sous un jour complémentaire, notre sujet.

IV. ETUDE DE LA CORRESPONDANCE $K \xrightarrow{\varphi} \varphi(K)$

Avant d'en chercher les ensembles invariants ou « dilatés » (pour garder les terminologies ci-dessus) on fera quelques remarques générales.

A) Remarques générales

1) *Le « plus souvent »* $\varphi(K) = \emptyset$. Ceci vient du fait que le préordre induit sur les événements $\leqslant \cdot_K$ n'est pas généralement une probabilité qualitative.

En effet, la relation caractéristique d'une probabilité qualitative est $\forall\ A$, B, C tel que $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, $A \leqslant \cdot B \Leftrightarrow A \cup C \leqslant \cdot B \cup C$.

Or pour un ensemble K donné, il n'est pas vrai de façon générale que

$$\operatorname*{Min}_{\vec{p}\in K}\left[\sum_{i\in I_A} p_i\right] \leqslant \operatorname*{Min}_{\vec{p}\in K}\left[\sum_{i\in I_B} p_i\right] \Rightarrow \operatorname*{Min}_{\vec{p}\in K}\left[\sum_{i\in I_{A\cup C}} p_i\right] \leqslant \operatorname*{Min}_{\vec{p}\in K}\left[\sum_{i\in I_{B\cup C}} p_i\right]$$

2) Dans le texte [1], les auteurs ne considèrent pas des ensembles K quelconques, mais des ensembles du type $\{\vec{p} \mid p_{i1} \geqslant p_{i2} \geqslant \ldots \geqslant p_{in}\}$.

(1) *R.I.R.O.*, op. cité [4].

Appelons G^n la famille des ensembles de ce type.

Un ensemble G de G^n est associé à un classement ne concernant que les *seuls* événements élémentaires, donc à une opinion sur la plausibilité des seuls événements de ce type.

Deux points peuvent être notés :

— Si $G \in G^n$, la restriction de $\leqslant \cdot_G$ (qui est un préordre *complet* sur les événements) aux événements élémentaires est plus *précise* que le préordre initial, que G est sensé traduire.

En effet soit $G \{ \vec{p} \mid p_{i1} \geqslant p_{i2} \geqslant \dots \geqslant p_{in} \}$ (associé à $s_{i1} \cdot \geqslant \dots \cdot \geqslant s_{in}$).

Il est clair que (1, 0, 0, ..., 0) appartient à G. Il en résulte que :

$$\operatorname*{Min}_{\vec{p} \in G} p_{in} = \dots = \operatorname*{Min}_{\vec{p} \in G} p_{i2} = \operatorname*{Min}_{\vec{p} \in G} p_{i2} + p_{i3} = \dots = 0,$$

Donc $s_{in} \underset{G}{\dot{\sim}} \dots s_{i2} \quad \underset{G}{\dot{\sim}} \dots \underset{G}{\dot{\sim}} \bigcup_{p>1} s_{ip} < \cdot_G \, s_{i1}$ (1).

Alors qu'initialement on avait seulement $s_{in} \leqslant \cdot \, s_{i2} \leqslant s_{i1}$.

— Si $G \in G^n$, $\leqslant \cdot_G$ n'est pas une probabilité qualitative.

En effet $\operatorname*{Min}_{\vec{p} \in G} p_{i1} + p_{in} = \dfrac{1}{n-1}$ et $\operatorname*{Min}_{\vec{p} \in G} p_{i1} + p_{i2} + p_{in} = \dfrac{2}{n-1}$ et donc :

$$s_{i1} \cup s_{in} < \cdot_G \, s_{i1} \cup s_{i2} \cup s_{in}$$

Or $s_{in} \underset{G}{\dot{\sim}} s_{i2} \cup s_{in}$ (cf. ci-dessus) . $\leqslant \cdot_G$ n'est donc pas une probabilité qualitative.

3) Même si $\varphi(K) \neq \emptyset$, la relation entre K et $\varphi(K)$ n'est pas pour autant simple. On donne ci-dessous, un exemple d'un $K \subset S^3$, où $\varphi(K) \neq \emptyset$ mais où $K \cap \varphi(K) = \emptyset$.

Soit T l'intérieur du triangle HIJ défini page 36.

I	(0 ,	1/2,	1/2)
H	(1/4,	1/4,	1/2)
J	(1/3,	1/3,	1/3)

---

(1) $\underset{G}{\dot{\sim}}$ signifie qu'à la fois $\leqslant \cdot_G$ et $_G \cdot \geqslant$ sont vérifiés.

Soit K l'ensemble compact $A'B'C'D'E'F'$, où $B'C'$ est un segment de droite de S^3 de cote α « petite ». ($< 1/3$)

$A'B'$ est un segment de droite de S^3 d'ordonnée β
$A'C'$ est un segment de droite de S^3 d'abscisse γ avec $\alpha > \beta > \gamma$
et où $F'E'D'$ sont quelconques pourvu que $K \cap T = \emptyset$.

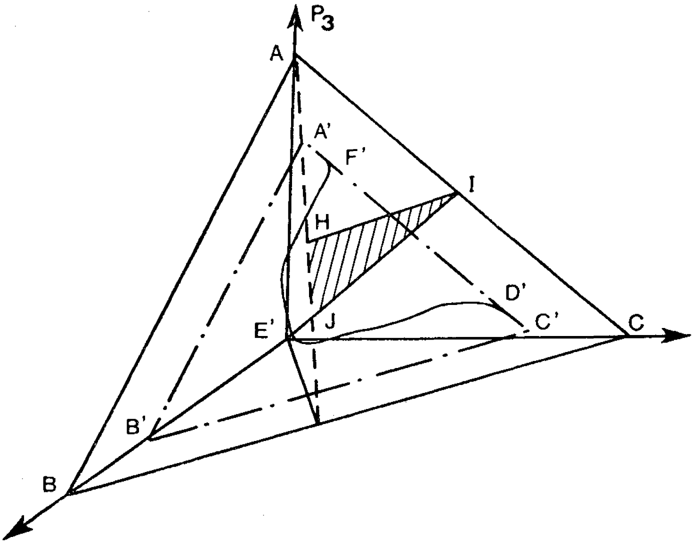

Figure 3

Le lecteur vérifiera que le préordre $\leqslant \cdot_K$ est le suivant

$$s_1 < \cdot_K s_2 < \cdot_K s_3 < \cdot_K s_1 \cup s_2 < \cdot_K s_1 \cup s_3 < \cdot_K s_2 \cup s_3 < \cdot_K s_1 \cup s_2 \cup s_3$$

L'intérieur du triangle HIJ est l'ensemble des probabilités quantitatives compatibles avec cette probabilité qualitative donc $\varphi(K) = T$ et $K \cap \varphi(K) = \emptyset$.

B) « Points fixes » de la transformation

1) *Si $F' \in F'^{n(1)}$ alors $F' \subseteq \varphi(F')$.*

Preuve.

Si $F' \in F'^n$, par définition, $\exists\ F \in F^n$ tel que $\bar{F}' \subseteq F$.

---

(1) Rappelons que les Familles F^n et F'^n sont définies au paragraphe 2.

- $F \varepsilon F^n \Leftrightarrow \forall \vec{p} \varepsilon F, \vec{p}$ est compatible avec une certaine probabilité qualitative.
- $F' \varepsilon F'^n \Leftrightarrow \exists\ F \varepsilon F^n$ tel que $\bar{F}] \subseteq F$.

Montrons qu'alors nécessairement $\varphi(F') = F$ (alors $\varphi(F') \supseteq \bar{F}' \supseteq F'$). Considérons pour cela $\leqslant \cdot_{F'}$, le préordre sur les événements associé à F' par le critère de I. On peut affirmer que $\leqslant \cdot_{F'}$ est une probabilité qualitative, avec laquelle les points de l'ensemble F sont compatibles.

Pour le voir, prenons deux événements A et B, tels que pour la probabilité quantitative compatible avec F, $A < \cdot B$ (strictement).

Remarquons d'abord que $\operatorname*{Inf}_{\vec{p} \in F'} \left[\sum_{i \in I_A} p_i \right] = \operatorname*{Min}_{\vec{p} \in \bar{F}'} \left[\sum_{i \in I_A} p_i \right]$

Et supposons ce minimum atteint en $\vec{p}_0$.

Si l'on remplace A par B le minimum à la même expression est atteint en $\vec{p}_1$.

Soit :

$$p_0(A) = \left[\sum_{i \in I_A} p_i \right]_{\vec{p} = \vec{p}_0} \quad \text{et} \quad p_0(B) = \left[\sum_{i \in I_B} p_i \right]_{\vec{p} = \vec{p}_0}$$

$$p_1(A) = \left[\sum_{i \in I_A} p_i \right]_{\vec{p} = \vec{p}_1} \quad \text{et} \quad p_1(B) = \left[\sum_{i \in I_B} p_i \right]_{\vec{p} = \vec{p}_1}$$

Puisque $\bar{F}' \subseteq F$, $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_0 \in F$ et l'on a

$$p_0(A) < p_0(B) \quad \text{et} \quad p_1(A) < p_1(B)$$

Or $p_0(A) \leqslant p_1(A)$,

Donc $p_0(A) < p_1(B)$

Soit encore $A \underset{F'}{<\cdot} B$ C.Q.F.D.

De même on montrerait que $A \dot{\sim} B \Rightarrow A \underset{F'}{\dot{\sim}} B$.

D'où les propriétés annoncées.

2) *Si $F \in F''$, alors $\bar{F} \supseteq \varphi(F)$:*

En effet, par un raisonnement semblable au précédent on voit que si pour la probabilité qualitative avec laquelle les points de F sont compatibles $A \cdot > B$, alors $\operatorname*{Inf}_{\vec{p} \in F} \left[\sum_{i \in I_A} p_i \right] \geqslant \operatorname*{Inf}_{\vec{p} \in F} \left[\sum_{i \in I_B} p_i \right]$.

On a donc

$$\begin{cases} \text{ou} & A \cdot >_F B \\ \text{ou} & A \underset{F}{\dot{\sim}} B \end{cases}$$

Les contraintes définissent $\varphi(F)$ sont alors :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Soit} \quad \sum_{i \in I_A} p_i > \sum_{i \in I_B} p_i \\ \text{Soit} \quad \sum_{i \in I_A} p_i = \sum_{i \in I_B} p_i \end{array} \right.$$

$\bar{F}$ lui étant défini par $\sum_{i \in I_A} p_i \geqslant \sum_{i \in I_B} p_i$.

Il en résulte $\varphi(F) \subseteq \bar{F}$.

3) *De (1) et (2) : on peut déduire que :*

• $F \in F^n \cap F'^n \Rightarrow F = \varphi(F)$

Les ensembles de $F^n \cap F'^n$ ne sont autre que les ensembles fermés de $F^{(n)}$ (1) et de ce fait $F \subseteq \varphi(F)$ et $\varphi(F) \subseteq \bar{F} = F$. D'où l'affirmation.

• $\{F \in F'^n - F^n \cap F'^n\} \Rightarrow F \subset \varphi(F)$.

L'inclusion est stricte puisqu'alors F élément de F'^n est inclus dans un élément de F^n, sans être lui-même élément de F^n.

L'implication dans les 2 cas ne vaut que dans un sens.

Parmi les invariants de la transformation, il en est qui tout en appartenant nécessairement à F^n, n'appartiennent pas à $F^n \cap F'^n$.

Il existe en général, des ensembles « dilatés » ($K \subset \varphi(K)$) qui tout en étant des sous-ensembles d'un $F \in F^n$, ne sont pas des éléments de F'^n.

Ces différents points seront illustrés dans le cas ou $n = 3$.

4) *Études de $K \xrightarrow{\varphi} \varphi(K)$ pour $n = 3$*

Soit l'ensemble des probabilités qualitatives définies sur les événements $s_1, s_2, s_3, s_1 \cup s_2, s_2 \cup s_3, s_1 \cup s_3, s_1 \cup s_2 \cup s_3$ numérotées de 1 à 7 et de 1' à 4'.

(1) $s_1 < s_2 < s_3 < s_1 \cup s_2 < s_1 \cup s_3 < s_2 \cup s_3 < s_1 \cup s_2 \cup s_3$

(2) $s_1 < s_2 < s_3 \sim s_1 \cup s_2 < s_1 \cup s_3 < s_2 \cup s_3 < s_1 \cup s_2 \cup s_3$

(3) $s_1 \sim s_2 < s_3 < s_1 \cup s_2 < s_1 \cup s_3 \sim s_2 \cup s_3 <$

(4) $s_1 < s_2 \sim s_3 < s_1 \cup s_2 \sim s_1 \cup s_3 < s_2 \cup s_3 < s_1 \cup s_2 \cup s_3$

(1) $F^{(n)} \cap F'^n$ n'est jamais vide, il contient au moins l'ensemble réduit au point $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$.

(5) $s_1 \sim s_2 < s_3 \sim s_1 \cup s_2 < s_1 \cup s_3 \sim s_2 \cup s_3 < s_1 \cup s_2 \cup s_3$

(6) $s_1 < s_2 \sim s_3 \sim s_1 \cup s_2 \sim s_1 \cup s_3 \sim s_2 \cup s_3 <$

(7) $s_1 \sim s_2 \sim s_3 < s_1 \cup s_2 \sim s_1 \cup s_3 \sim s_2 \cup s_3 <$

(1′) $s_1 < s_2 < s_1 \cup s_2 < s_3 < s_1 \cup s_3 < s_2 \cup s_3 < s_1 \cup s_2 \cup s_3$

(2′) $s_1 < s_2 < s_1 \cup s_2 \sim s_3 < s_1 \cup s_3 < s_2 \cup s_3 < s_1 \cup s_2 \cup s_3$

(3′) $s_1 \sim s_2 < s_1 \cup s_2 < s_3 < s_1 \cup s_3 \sim s_2 \cup s_3 <$

(4′) $s_1 \sim s_2 \sim s_1 \cup s_2 < s_3 \sim s_1 \cup s_3 \sim s_2 \cup s_3 \sim s_1 \cup s_2 \cup s_3$

H, I, J, étant définis comme à la page 7 et G étant le point (0, 0, 1), on a :

$K(1) = \overset{0}{\widehat{HIJ}}$, $K(2) =]HI[$, $K(3) =]HJ[$,

$K(4) =]JI[$, $K(5) = H$,

$K(6) = I$, $K(7) = J$.

$K(1') = \overset{0}{\widehat{GHI}}$

$K(2') =]HI]$

$K(3') =]HG]$

$K(4') = G$

Les ensembles invariants sont au nombre de 6

$K(3), K(4), K(5), K(6), K(7), K(4')$,

Pour les autres $\varphi(K(i)) = \varnothing$

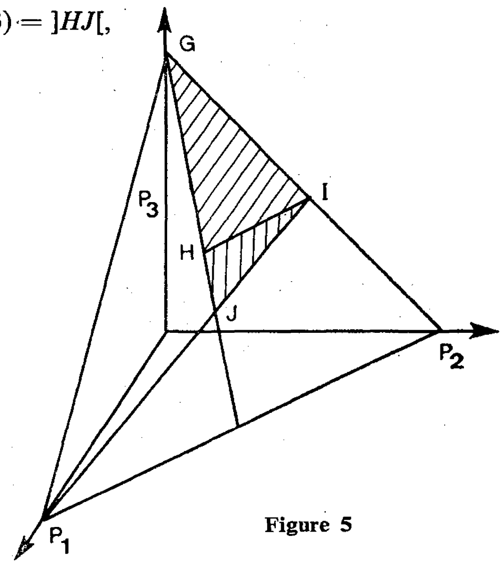

Figure 5

$K(3)$ et $K(4)$ sont « invariants » sans être des éléments $F^{(3)} \cap F'^{(3)}$.

L'ensemble formé par une suite de points de $]JI[$, ayant un point d'accumulation en J, est un exemple d'ensemble n'appartenant pas à $F'^3 - F'^3 \cap F^3$ et cependant tel que $K \subset \varphi(K)$ (inclusion stricte). Notons que cette analyse ne concerne que le 1/6^e du simplexe. Par permutation de 1, 2, 3, on obtiendrait le simplexe tout entier.

V. LE CRITERE ET L'AXIOME 2

Le préordre sur les actes défini par la relation (1).

$$\underline{f} \leqslant \underline{g} \Leftrightarrow \operatorname*{Min}_{\vec{p} \in K} E_{\vec{p}}(\underline{f}) \leqslant \operatorname*{Min}_{\vec{p} \in K} E_{\vec{p}}(\underline{g})$$

ne satisfait pas en général l'axiome 2 de Savage.

L'axiome 2 de Savage affirme que l'ordre entre deux actes n'est pas modifié si l'on déplace une partie commune aux deux actes.

Considérons comme sous-ensemble de S^3 : le triangle GIH du paragraphe précédent (1).

Soient alors les actes $\underline{f}$ et $\underline{g}$ définis comme suit :

$$\begin{array}{lll} s = s_1 & \underline{f}(s) = \alpha & \underline{g}(s) = \alpha \\ s = s_2 & \underline{f}(s) = 2 & \underline{g}(s) = 20 \\ s = s_3 & \underline{f}(s) = 8 & \underline{g}(s) = 4 \end{array}$$

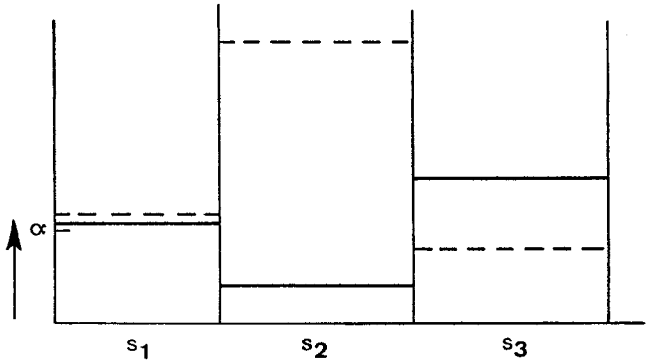

Figure 5

Comparons les actes $\underline{f}_\alpha$ et $\underline{g}_\alpha$ (qui ont une partie commune $\underline{f}(s_1) = \underline{g}(s_1) = \alpha$).

Pour cela remarquons que $\operatorname*{Min}_{\vec{p} \in K} (p_1 u_0 + p_2 v_0 + p_3 w_0)$ pour u_0, v_0 et w_0 donnés est nécessairement atteint soit en G, soit H ou I.

---

(1) Le fait que GIH soit associé à une probabilité qualitative n'est pas déterminante pour le contre exemple. Il suffit pour s'en convaincre de remplacer K par K' qui n'en diffèrerait que par un point intérieur.

On constate alors que

— pour α « grand positif » $\underline{f}_\alpha > \underline{g}_\alpha$

par exemple pour $\alpha = 20$:

$$\underset{\vec{p}\in K}{\mathrm{Min}}\, E(\underline{f}_\alpha) = \mathrm{Min}\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 9,5 \end{bmatrix} = 5, \text{ minimum atteint en } H$$

$$\underset{\vec{p}\in K}{\mathrm{Min}}\, E(\underline{g}_\alpha) = \mathrm{Min}\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} = 4, \text{ minimum atteint en } G$$

— pour α « grand négatif » $\underline{f}_\alpha < \underline{g}_\alpha$

par exemple pour $\alpha = -20$

$$\underset{\vec{p}\in K}{\mathrm{Min}}\, E(\underline{f}_\alpha) = \mathrm{Min}\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -0,5 \end{bmatrix} = -0,5 \text{ minimum obtenu en } I$$

$$\underset{\vec{p}\in K}{\mathrm{Min}}\, E(\underline{g}_\alpha) = \mathrm{Min}\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \text{ minimum obtenu en } I$$

L'ordre entre les deux actes $\underline{f}$ et $\underline{g}$ s'inverse, si l'on déplace la partie commune aux actes. C'est la variation en fonction de l'ordonnée α de la partie commune, du point $\vec{p}$ où le minimum sur K est atteint, qui explique ce renversement de l'ordre : en « général » le critère ne vérifiera pas l'axiome 2.

CONCLUSION

L'analyse faite ici du critère peut se résumer ainsi.

Étant donné deux événements A et B le critère permet de définir celui sur lequel on jouera le plus volontiers une mise quelconque : il permet donc une estimation de la vraisemblance relative des événements et on peut dire de celle-ci, ou bien qu'elle n'est pas conforme à l'appréciation qu'on s'en faisait ex ante sur laquelle on était sensé se fonder, ou bien qu'elle est contradictoire.

Ainsi par exemple :

— on pariera indifféremment sur deux événements A et B alors qu'a priori on pensait A plus vraisemblable que B (cas où l'on part d'un ensemble G);

— on pariera « comme si » il existait une probabilité qualitative sur les événements, alors qu'on restreignait initialement les probabilités à un ensemble strictement incompatible avec ladite probabilité qualitative (cf. exemple $K \cap, \varphi(K) = \emptyset$);

— on pariera sur A plutôt que B, mais on sera indifférent à $B \cup C$ et $A \cup C$, alors qu'on supposait initialement $A \cup C$ plus vraisemblable que $B \cup C$ (cas où $F \in F^{(n)}$ et $\varphi(F) = \emptyset$) ;

— on pariera sur A plutôt que B, mais sur $B \cup C$ plutôt que sur $A \cup C$ (cas où le préordre n'est pas une probabilité qualitative).

Des exemples de ce type illustrant les résultats ci-dessus peuvent être multipliés. Ils tendent à prouver, non qu'il ne faut pas utiliser le critère — on peut tout à fait imaginer des situations de jeux où il est adéquat — mais qu'il faut se garder de l'utiliser imprudemment, et de considérer l'ensemble K comme un ensemble de « probabilités subjectives mal définies » du moins si l'on veut conserver à l'expression de « probabilités subjectives » le caractère opérationnel précis et la qualité de cohérence que lui a donné Savage.

Je remercie M. Bessiere, qui m'a fait de nombreuses et utiles remarques sur ce texte, et M. Jean-Yves Jaffray qui m'a signalé une erreur dans une version préliminaire; je suis bien sûr seul responsable de toutes celles qui pourraient subsister.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Bessiere, Critère de regret minimax et probabilités subjectives, Communication au *3e Congrès International de l'IFORS*, Oslo, 1963.

[2] B. De Finetti, « La prévision, ses lois logiques, ses sources subjectives », *Annales de l'Institut Henri-Poincaré*, 1937.

[3] J. Dreze, « Fondements logiques de la probabilité subjective et de l'utilité », *Colloque C.N.R.S.*, Paris, 1961.

[4] C. Fourgeaud, B. Lenclud et Ph. Sentis, « Critères de choix en avenir partiellement incertain », *Revue Française d'Informatique et de Recherche opérationnelle*, n° 14, 1968.

[5] R. Guesnerie et J.-Y. Jaffray, « Notes sur l'ouvrage de Savage : Foundations of Statistics », *Bulletin de Mathématiques Economiques* (à paraître).

[6] R. Guesnerie et P. Malgrange, « OPTIMIX, 4 aspects de l'opération », note ronéotypée CEPREMAP, 1969.

[7] A.-K. Maitra, « Sur la théorie de la décision dans le cas d'un nombre fini d'états », *Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle*, n° 9, Paris, 1966.

[8] P. Malgrange, « Critère de choix en avenir incertain. Ébauche d'un algorithme d'optimisation », *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, vol. 2, 1970.

[9] P. Malgrange, « Critères de choix en avenir incertain. Propriétés des solutions optimales, extension à la dynamique », *Theory and Decision*, oct. 1970.

[10] G. Morlat, « Le choix d'une décision et le choix d'un critère », *Colloques du C.N.R.S. sur la Décision*, 1961.

[11] L.-J. Savage, *The Foundations of Statistics*, Wiley éd., 1954.