Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

Charles S. Tapiero

Affectation séquentielle de nouvelles machines

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 6, nº V1 (1972), p. 57-63.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1972__6_1_57_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, N° V-1, 1972, p. 57-63)

AFFECTATION SEQUENTIELLE DE NOUVELLES MACHINES

par Charles S. TAPIERO (1)

Résumé. — *L'affectation séquentielle de nouvelles machines consiste à déterminer une séquence optimale de répartition de nouvelles machines entre n centres productifs appartenant à une seule entreprise et ayant la même fonction économique. Cette note modélise ce problème d'affectation sous la forme d'un problème de commande optimale. La solution numérique de tels problèmes étant compliquée, on suppose que les machines travaillent continuellement, ainsi, on obtient la séquence optimale en résolvant un programme linéaire en nombres entiers.*

INTRODUCTION

L'affectation séquentielle de nouvelles machines consiste à déterminer une séquence optimale pour la répartition de nouvelles machines entre n centres de production appartenant à une seule entreprise et ayant la même fonction économique. Par exemple, un des problèmes rencontré aux P.T.T. consiste à trouver l'affectation optimale de nouvelles machines de tri (à peu près une tous les six mois) à des centres de traitement de courrier. Le problème rencontré aux P.T.T. est plus compliqué du fait que ces centres de traitement de courrier sont interdépendants. Toutefois ce problème en est une première approximation.

Le but de cet article et de modéliser la dynamique de ce problème et de déterminer les conditions nécessaires d'optimalité de la séquence. L'approche que nous utilisons est celle de la théorie de la commande optimale [1,2,3]. Pour obtenir des résultats faciles à calculer nous transformons notre problème en un problème de programmation linéaire en nombres entiers [5].

(1) Assistant Professor of Business, Columbia University.

MODELE

Considérons un système de n centres productifs. Chacun de ces centres est équipé de machines pour satisfaire la demande et réaliser les travaux correspondants par des machines. Supposons que ces centres soient indépendants c'est-à-dire, ce que les travaux réalisés par un centre n'aient aucune influence sur les autres centres. La question posée consiste à déterminer à quels centres les nouvelles machines doivent être affectées. Si le coût des machines était nul, nous pourrions en fournir autant que demandé. Par contre, les machines, coûtent en général assez cher et indépendamment de leur coût on peut être limité par la capacité de production de nouvelles machines. Ainsi, on suppose qu'un certain nombre de machines sont reçues par la direction de l'entreprise et que celle-ci doit les affecter au centre productif qui en a « le plus besoin ».

Graphiquement nous représentons ce problème d'affectation par la figure 1.

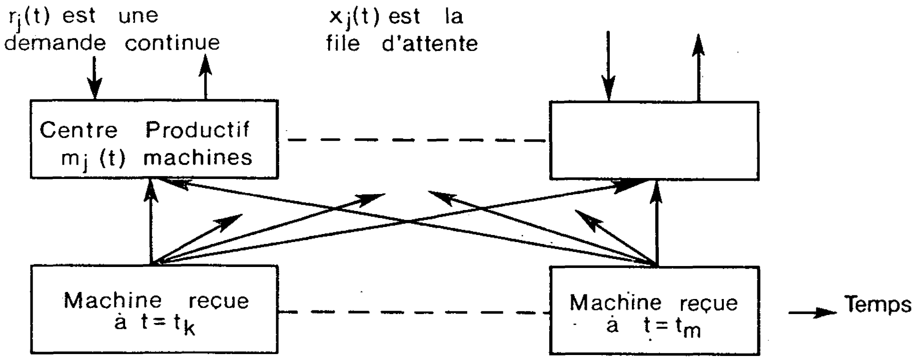

Figure 1.
Affectation sequentielle de nouvelles machines.

Définissons les variables suivantes :

n : Le nombre de centres productifs i, $i = 1 \dots n$.

$m_i(t)$: Nombre de machines au centre productif i à un instant donné t.

α : Rendement des machines en unités de travail.

$w_i(t)$: Affectation de machines au centre productif i a un instant t.

$u_i(t)$: Unité de travail effectuées par le centre productif i.

$M(t)$: Nombre de machines dans les centres productifs à un instant t.

$r_i(t)$: Service demandé au centre productif i à un instant donné t.

$x_i(t)$: File d'attente de services insatisfaits en unités de travail.

k_i : Coefficient de priorité de service à chacun des centres productifs i.

Le problème est de déterminer l'affectation temporelle de nouvelles machines $w_i(t)$ entre les n centres productifs de manière à minimiser les files d'attentes $x_i(t)$ multipliées par des indices prioritaire k_i. Les équations qui caractérisent le comportement du système sont présentées ci-dessous.

(1) $\dot{x}_i(t) = r_i(t) - u_i(t) \qquad x_i(0) = x_i^0 \qquad i = 1 \dots n$

(2) $\dot{m}_i(t) = w_i(t) \qquad m_i(0) = m_i^0 \qquad i = 1 \dots n$

(3) $\dot{M}(t) = 1 \qquad M(0) = M^0$

(4) $u_i(t) - \alpha m_i(t) \leqslant 0 \qquad i = 1 \dots n$

(5) $\sum_{i=1}^{n} m_i(t) = M(t)$

(6) $0 \leqslant w_i(t) \leqslant 1 \qquad x_i(t) \geqslant 0 \qquad i = 1 \dots n$

La première équation (1) exprime le comportement de la file d'attente en fonction de nouveaux services demandés du centre productif et des travaux réalisés. L'équation (2) est un flux de nouvelles machines s'ajoutant à chacun des centres productifs i. L'équation (3) précise qu'une machine par unité de temps rentre au service de l'entreprise. Les équations (4), (5), (6) ne sont que des contraintes sur les centres productifs. (4) limite la production $u_i(t)$ à celle de capacité $\alpha m_i(t)$. (5) est une identité entre le nombre total de machines et le parc de machines de chaque centre productif. Le but est de minimiser la longueur totale des files d'attente dans un intervalle de temps $[t_0, t_q]$, c'est-à-dire :

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{Min} J = \int_{t_0}^{t_q} \sum_{i=1}^{n} k_i x_i(t)\, \mathrm{d}t$$

sous les contraintes (1)-(6).

On reconnaît immédiatement un problème de commande optimale linéaire en $w_i(t)$. Sous cette forme il résulte que la politique optimale d'affectation $w_i(t)$ est bang-bang [1], soit $w_i(t) = 0$ ou 1 [6].

Ceci implique que nous avons un flux continu de nouvelles machines. Par contre, bien que les centres productifs travaillent continuellement, en réalité le flux de nouvelles machines, lui, n'est pas continu. Les machines peuvent arriver à des intervalles de temps égaux ou inégaux. Ainsi nos équations ne représentent pas exactement le phénomène réel. Si nous supposons que les machines arrivent à des instants t_j $j = 1 \dots q - 1$, alors, $m_i(t)$ peut s'écrire :

$$m_{ij}(t) = m_{ij} \qquad t_{j-1} \leqslant t < t_j \qquad j = 1 \dots q$$

(8) ou

$$m_{ij} = m_i^0 + \sum_{s=1}^{j} v_{is} \qquad v_{is} = 0, 1$$

Les équations (3) et (5) sont donc éliminées si nous admettons initialement que $\sum_{i=1}^{n} m_i^0 = M^0$. Par contre (4) se réécrit :

$$(9) \quad u_i(t) - \alpha\left(m_i^0 + \sum_{s=1}^{j} v_{is}\right) \leqslant 0 \qquad t_{j-1} \leqslant t < t_j \qquad j = 1 \dots q$$

$$(10) \qquad K_j = \begin{cases} 1 & \text{si } t_{j-1} \leqslant t < t_j \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

nous obtenons ainsi

$$(11) \qquad u_i(t) - \sum_{j=1} \alpha\left(m_i^0 + \sum_{s=1} v_{is}\right)K_j \leqslant 0 \qquad t_0 \leqslant t < t_q$$

Récapitulant, le problème est de minimiser (7) sous les contraintes : (1), (11) et

$$(12) \qquad v_{is} = 0,1 \qquad \text{et} \qquad x_i(t) \geqslant 0$$

Nous obtenons ainsi un problème de commande optimale assez compliqué à résoudre. Premièrement, l'inégalité $x_i(t) \geqslant 0$ doit être transformée en une inégalité dans laquelle figure explicitement la variable de commande v_{is} (2, pp. 117-127). De plus nous avons des discontinuités en chacun des points t_1 t_2 ... (2, pp. 104-108).

La solution numérique d'un tel problème n'est pas sans difficultés, par contre sur ordinateur, la méthode du gradient conjugué peut être appliquée aisément [4]. Si nous supposons que les machines travaillent continuellement, des résultats plus simples peuvent être obtenus, ce qui peut simplifier les calculs. Cette dernière hypothèse est réaliste dans la mesure où la demande qui s'exerce sur les centres productifs est une fonction croissante. Dans ce cas nous devons minimiser

$$(13) \qquad J = \sum_{j=1}^{q} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sum_{i=1}^{n} k_i x_i(t)\, dt$$

lorsque

$$(14) \quad \begin{aligned} x_i(t) &= x_i(t_{j-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t} r_i(\tau)\, d\tau - \alpha\left(m_i^0 + \sum_{s=1}^{j} v_{is}\right)(t - t_{j-1}) \\ x_i(t_{j-1}) &= x_i(0) + \int_{t_0}^{t_{j-1}} r_i(\tau)\, d\tau - \alpha \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{s=1}^{k} (m_i^0 + v_{is})(t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$

et

$$(15) \qquad x_i(t) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad v_{is} = 0,1$$

Appelons $R_i(t_k, t) = \int_{t_k}^{t} r_i(\tau)\,d\tau$ et combinons (13) avec (14), donc

(16)

$$J = \sum_{j=1}^{q} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sum_{i=1}^{n} k_i \Bigg[R_i(t_0, \tau) + x_i(0) - \alpha \sum_{k=1}^{j-1} \left(m_i^0 + \sum_{s=1}^{k} v_{is} \right)(t_k - t_{k-1}) - \alpha \left(m_i^0 + \sum_{s=1}^{j} v_{is} \right)(t - t_{j-1}) \Bigg] d\tau$$

ou, après intégration

$$(17) \quad J = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} k_i \Bigg[\int_{t_{j-1}}^{t_j} R_i(t_0, \tau)\,d\tau + x_i(0)(t_j - t_{j-1}) - \alpha(t_j - t_{j-1}) \sum_{k=1}^{j-1} \left(m_i^0 + \sum_{s=1}^{k} v_{is} \right)(t_k - t_{k-1}) - \frac{\alpha}{2}(t_j - t_{j-1})^2 \left(m_i^0 + \sum_{s=1}^{j} v_{is} \right) \Bigg]$$

sous les contraintes :

$$(18) \quad \begin{cases} x_i(0) + R_i(t_0, t) - \alpha \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \left(m_i^0 + \sum_{s=1}^{k} v_{is} \right)(t_k - t_{k-1}) \\ \qquad - \alpha(t - t_{j-1}) \left(m_i^0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{j} v_{is} \right) \geqslant 0 \qquad i = 1 \dots n, j = 1 \dots q \\ v_{is} = 0,1 \end{cases}$$

(17) et (18) déterminent un programme linéaire en variables bivalentes v_{is}. Bien que (17) soit fonction de paramètres donnés et de v_{is}, nous avons en (18) une contrainte continue. Remplaçons cette contrainte par plusieurs contraintes estimées en des points fixes. Limitons ces contraintes aux points $t_j\ j = 1 \dots q$. Il s'en suit que $x_i(t) \geqslant 0$ est remplacé par $x_i(t_j)$. Cette contrainte est identique à la contrainte continue lorsque la fonction demande $r_i(t)$ est une fonction croissante. Le programme linéaire en variables 0, 1 est donc

Minimiser

$$(19) \qquad J = A - \sum_{i=1}^{n} \alpha k_i \Bigg[\sum_{j=1}^{q} \frac{(t_j - t_{j-1})^2}{2} \sum_{s=1}^{j} v_{is} + \sum_{j=1}^{q} (t_j - t_{j-1}) \cdot \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{s=1}^{k} v_{is} \Bigg]$$

sous les contraintes

$$\alpha \sum_{k=1}^{j} \sum_{s=1}^{k} v_{is}(t_k - t_{k-1}) \leqslant B_{ij} \qquad i = 1 \dots n ; j = 1 \dots q \tag{20}$$

ou A et B_{ij} sont donnés par

$$A = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} k_i \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} R_i(t_0, \tau)\, d\tau + (x_i(0) - \alpha m_i^0)(t_j - t_{j-1}) - \frac{\alpha}{2} m_i^0 (t_j - t_{j-1})^2 \right]$$

$$B_{ij} = x_i(0) + R_i(t_0, t_j) - \alpha m_i^0 \sum_{k=1}^{j} (t_k - t_{k-1})$$

EXEMPLE

Supposons que nous ayons 3 centres productifs et admettons qu'une machine est reçue tous les ans. Le problème est de déterminer la séquence selon laquelle on affectera trois machines aux trois centres productifs. Soit $m_i^0 i = 1, 2, 3$, le nombre de machines se trouvant initialement au centre productif i.

Soit $\alpha = 100$ et

$$\begin{array}{llll} m_1^0 = 4 & t_1 = 1 & k_1 = 1.5 & x_1(0) = 100 \\ m_2 = 5 & t_2 = 2 & k_2 = 1.75 & x_2(0) = 150 \\ m_3^0 = 3 & t_3 = 3 & k_3 = 2.0 & x_3(0) = 100 \end{array}$$

et supposons que les demandes soient données par

$$r_1(t) = 400 + 40t \quad r_2(t) = 500 + 50t \quad r_3(t) = 300 + 30t, \text{ alors}$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & 180 & 280 \\ 175 & 250 & 375 \\ 115 & 160 & 235 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas la matrice des contraintes est donnée par ($v_{is} = 0, 1$)

$$\begin{bmatrix} v_{11}, & v_{11} + v_{12}, & v_{11} + v_{12} + v_{13} \\ v_{21}, & v_{21} + v_{22}, & v_{21} + v_{22} + v_{23} \\ v_{31}, & v_{31} + v_{32}, & v_{31} + v_{32} + v_{33} \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 1.2 & 1.8 & 2.8 \\ 1.75 & 2.5 & 3.75 \\ 1.15 & 1.6 & 2.35 \end{bmatrix}$$

L'objectif est de maximiser :

$$J = 150(3.5v_{11} + 2v_{12} + .5v_{13}) + 175(3.5v_{21} + 2v_{22} + .5v_{13}) + 200(3.5v_{31} + 2v_{32} + .5v_{33})$$

La solution de ce programme linéaire bivalent est
$v_{31} = 1 \quad v_{22} = 1$ et $v_{33} = 1$, c'est-à-dire que la séquence optimale est d'affecter la première machine (ainsi que la troisième) au troisième centre productif alors que la deuxième machine est affectée au deuxième centre productif.

CONCLUSION

Les problèmes d'affectation séquentielle sont des problèmes de gestion dynamique, difficiles et importants à résoudre. Dans cette note nous avons formalisé une structure particulière de problèmes d'affectation séquentielle. Notamment, si une série de machines identiques arrivent à des instants précis $t_1 \ldots t_q$ et si n centres productifs réclament ces machines, alors dans quel ordre et à quels centres productifs doit-on affecter ces machines. Nous avons brièvement fait allusion dans l'introduction à l'importance de ces problèmes pour l'affectation de nouvelles machines de tri. Toutefois, il est évident que cette modélisation peut s'appliquer à de nombreux problèmes où l'*ordre de ravitaillement est essentiel*. Des extensions de ce problème peuvent être aussi considérées, par exemple, la question des temps optimaux $t_1\ t_2 \ldots t_q$ (optimal timing) peut être résolue en dérivant (19) par rapport aux variables t_j, $(j = 1 \ldots q)$.

REFERENCES

[1] R. Bellman, I. Glicksberg and D. Gross, « On the Bang-Bang Control Problem », *Quaterly Journal of Applied Mathematics*, 14, 1958.

[2] E. P. Hofer and P. S. Sagirow, « Optimal Systems Depending on Parameters », *Joint AACC*, June 1968, Michigan University.

[3] L. S. Pontryagin et al., *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* Interscience, New York, 1962.

[4] L. S. Lasdon, S. K. Mitter and A. D. Warren, « The Conjugate Gradient Method for Optimal Control Problems », *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-12, 1967, 132-138.

[5] E. Balas, « An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables », *Operations Research*, 13, 1965, 253-313.