

JEAN CAZALET

PATRICK MEHR

**Amélioration de l'utilisation d'une flotte
aérienne partagée entre deux bases principales
(Génération de convoys)**

*Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche
opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 9, n° V3 (1975),
p. 57-68.*

http://www.numdam.org/item?id=RO_1975__9_3_57_0

© AFCET, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AMÉLIORATION DE L'UTILISATION D'UNE FLOTTE AÉRIENNE PARTAGÉE ENTRE DEUX BASES PRINCIPALES (Génération de convoys) (*) (1)

par Jean CAZALET et Patrick MEHR (2)

Résumé. — En vue d'effectuer leur programme de vols commerciaux au meilleur coût économique, les compagnies aériennes cherchent à minimiser le nombre des avions nécessaires. Cependant, lorsque l'exploitation est partagée entre plusieurs aéroports principaux, il ne suffit plus de résoudre séparément des sous-problèmes relatifs à chacun d'eux. Seule une description globale envisageant des mises en place, à vide, d'avions entre ces aéroports (les convoys) permet d'améliorer l'utilisation de la flotte.

On trouvera ici une modélisation de ce problème en terme de graphe orienté dans lequel on fait passer un flot optimal par l'algorithme « Out of Kilter » de Fulkerson. La méthode a été programmée sur ordinateur et appliquée en grandeur réelle avec succès.

1. INTRODUCTION

L'un des problèmes auxquels sont confrontées les compagnies aériennes est celui de l'accomplissement optimal d'un programme hebdomadaire de vols commerciaux. Il s'agit de *construire les rotations* des avions, c'est-à-dire d'affecter à chaque appareil disponible l'enchaînement des vols qu'il devra effectuer, de manière à *réaliser l'ensemble du programme avec le nombre minimal d'avions*. Ainsi à partir des horaires fournis par les services commerciaux, un système informatique (MARS), en usage chez Air France, génère les rotations.

L'exploitation d'Air France est désormais partagée à Paris entre les aéroports d'Orly (ORY) et de Roissy - Charles-de-Gaulle (CDG). Une flotte desservant

(*) Reçu janvier 1975.

(1) Travail réalisé durant un stage à la Division Études Générales et Informatique d'Air France.

(2) Élèves à l'École Polytechnique.

les deux aéroports peut faire apparaître une ou plusieurs machines en réserve sur un aéroport, alors que, simultanément, des avions manquent sur l'autre aéroport pour assurer les départs. Faute de pouvoir modifier le programme des vols commerciaux, on peut tenter d'« *approvisionner* » au bon moment l'un des deux aéroports par des transferts d'avions à vide (*les convoys*). On espère ainsi réduire encore le nombre total des avions nécessaires pendant la période considérée (une semaine de pointe par exemple).

La présente étude a pour but de proposer de tels convoys, que l'on devra adjoindre au programme des vols commerciaux.

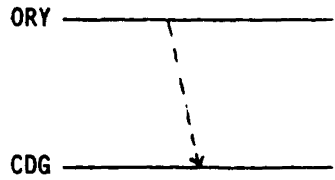
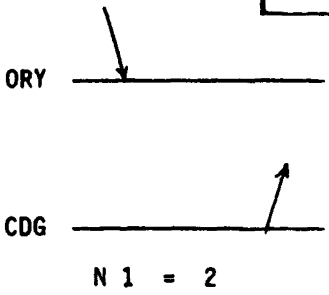
Le modèle adopté peut facilement *se généraliser à un nombre quelconque d'aéroports*, et il reste pertinent quelles que soient les importances relatives des trafics sur chacun de ces aéroports.

2. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

2. 1. Objectifs

L'étude concerne une flotte d'appareils donnée, et porte sur une semaine. On se donne une liste L1 de vols commerciaux à effectuer, qu'on considérera comme intangible. Sa réalisation la plus économique en nombre d'appareils nécessite N1 avions. On cherche une liste C de n convoys (vols à vide entre ORY et CDG ou entre CDG et ORY). La liste L2 = L1 ∪ C, obtenue en adjoignant les convoys trouvés aux vols commerciaux, exige un nombre minimum N2 d'appareils. Le but essentiel recherché consiste à *minimiser* N2, de sorte que l'on obtiendra nécessairement :

$$N2 \leq N1$$



L 1 = { arrivée à ORY le mardi à 09 h 00 ,
 { départ de CDG le jeudi à 08 h 00 }

C = { convoi le mercredi ,
 { ORY 08 h 00 - CDG 08 h 30 }

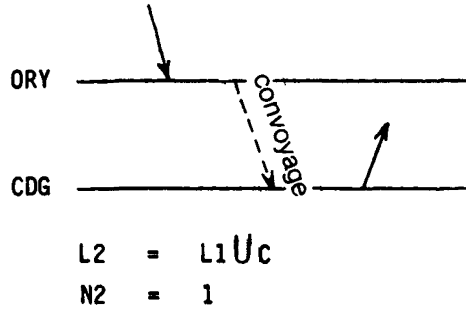


Figure 1

Un exemple simple : un avion gagné sur une semaine.

Cependant, chaque convoyage représentant une certaine dépense pour la Compagnie, on doit s'efforcer de limiter le nombre n des convoyages retenus. Enfin, la semaine est considérée comme une période répétitive à partir de laquelle on construit la saison tout entière. On cherchera donc, *si possible*, à vérifier la propriété de *rééquilibrage* suivante : sur chaque aéroport (ORY et CDG), le nombre d'arrivées doit être égal au nombre de départs. En vertu de la relation élémentaire

$$\begin{aligned}
 \text{Nombre d'avions au sol en fin de semaine} &= \text{Nombre d'avions au sol en début de semaine} \\
 &+ \text{Nombre d'arrivées} - \text{Nombre de départs}
 \end{aligned}$$

valable sur chaque aéroport, notre contrainte de rééquilibrage équivaut à imposer l'égalité des nombres d'avions au sol en début et en fin de semaine séparément à ORY et CDG. *Une condition nécessaire et suffisante pour que ce rééquilibrage soit possible est que le nombre d'arrivées à Paris (ORY + CDG) soit égal au nombre de départs de Paris (ORY + CDG) pendant la semaine considérée.*

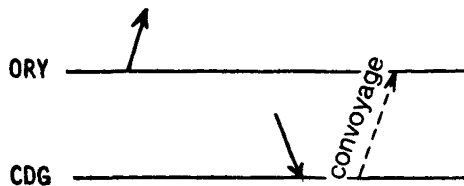


Figure 2

Ce *convoyage* ne fait gagner aucun avion; il assure seulement le *rééquilibrage*.

Ainsi, lorsque cette condition est réalisée, certains convoyages pourront servir à rééquilibrer les bases ORY et CDG.

Nous sommes maintenant en mesure de formuler le problème posé : *parmi l'ensemble des listes C de convoyages telles que les listes L2 associées assurent le rééquilibrage et minimisent le nombre N2 d'avions nécessaires (lorsque le rééquilibrage est impossible, lire : parmi l'ensemble des listes C de convoyages telles que les listes L2 associées minimisent N2...), trouver une liste C minimisant le nombre n de convoyages.*

2. 2. Contraintes

La détermination des effectifs minimaux N1 et N2 de la flotte doit tenir compte de contraintes relatives aux possibilités d'accrochage d'un vol sur un autre (exécution successive de deux vols par la même machine) : en particulier, un avion n'est pas disponible immédiatement après son arrivée. Nous considérerons que les vols se répartissent en c catégories, se distinguant par exemple par le type du vol (long-courrier, moyen-courrier, ...), par l'équipement commercial (nombre de sièges) de l'appareil qui devra l'effectuer, ou par toute autre caractéristique. A tout mouvement x (arrivée ou départ) se produisant à Paris sera donc affecté un nombre entier k compris entre 1 et $2c$, dépendant de la catégorie du vol auquel le mouvement appartient, et de l'escale où a lieu le mouvement (escale ORY : catégories 1 à c ; escale CDG : catégories $c + 1$ à $2c$). *Les seules contraintes que nous admettrons seront des contraintes de temps de transit minimal* : soient x_1 et x_2 deux arrivées de même catégorie k , x_2 étant antérieure à x_1 ; soient y_1 et y_2 deux départs de même catégorie l , y_2 étant postérieur à y_1 ; notre hypothèse fondamentale est que, si l'accrochage (x_1-y_1) est possible, l'accrochage (x_2-y_2) l'est aussi.



Figure 3

Il est alors possible de regrouper les contraintes en une matrice carrée d'ordre $2c$, soit T . L'arrivée x de catégorie k et le départ y de catégorie l pourront être accomplis à la suite l'un de l'autre par le même avion si et seulement si l'intervalle de temps qui les sépare excède le coefficient $T(k, l)$, dit *temps de transit minimal* :

$$t(y) - t(x) \geq T(k, l).$$

Ce temps de transit représente le traitement de l'appareil à l'escale :

- débarquement et embarquement des passagers;
- visite technique;
- changement éventuel d'équipement commercial, etc.

En outre, si les catégories k et l sont relatives l'une à ORY, l'autre à CDG, $T(k, l)$ doit inclure la durée du convoyage d'un aéroport à l'autre. La matrice T est donc décomposée en quatre blocs :

$$T = \begin{array}{cc|cc} & \text{ORY} & & \text{CDG} & \\ \hline & \text{accrochages} & | & \text{convoyages} & \text{ORY} \\ \hline & \text{convoyages} & | & \text{accrochages} & \text{CDG} \end{array} .$$

3. MODÉLISATION

3.1. Construction d'un graphe

On va ramener le problème posé à la recherche d'un flot de coût minimal sur un graphe (orienté). Tout revient donc à construire un graphe adapté au problème (dans la suite du texte, les lettres entre parenthèses font référence à la figure 4).

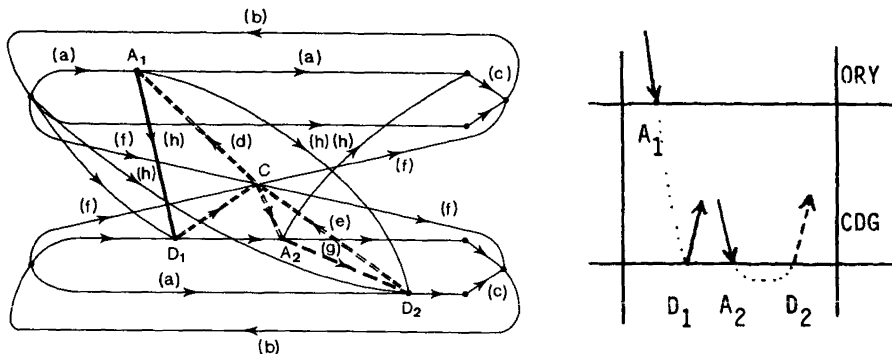
On commence par considérer $2c$ axes horizontaux, dont la longueur commune représente la durée de l'intervalle de temps étudié (dans notre cas, une semaine) : c axes pour ORY, c axes pour CDG. Sur ces axes, l'abscisse représente le temps compté à partir du début de la période. Dans la suite, ces axes seront dénommés *bases fictives*. Selon la catégorie et l'escale, les mouvements ayant lieu à Paris (ORY ou CDG), et eux seulement, sont figurés par un sommet (A ou D) appartenant à l'une des bases fictives, ayant pour abscisse l'horaire du mouvement. En fait, si le mouvement est une arrivée de catégorie k , son horaire t est préalablement remplacé par l'horaire fictif

$$t_f = t + T(k, k),$$

pour une raison qui apparaîtra ultérieurement (*cf.* remarque 1). Les sommets appartenant à une même base fictive sont reliés, dans l'ordre chronologique, par une suite d'*arcs horizontaux* (a).

D'autre part, on ajoute deux *arcs de retour* (b) (un pour ORY, un pour CDG), à l'un desquels on relie, en début et en fin de semaine, chaque base fictive par l'intermédiaire de sommets et d'*arcs* « de servitude » (c). Enfin, un nouveau

sommet, le « ciel » (C), est créé, et relié à chaque sommet figurant un mouvement : l'arc est orienté du ciel vers la base fictive s'il s'agit d'une arrivée (*arc ciel-terre*)^{*} (d), de la base fictive vers le ciel s'il s'agit d'un départ (*arc terre-ciel*) (e). En outre, le ciel est relié aux extrémités des arcs de retour par quatre *arcs de fermeture* (f) (cf. 3.2).



- | | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|--------------------|
| (a) arcs horizontaux | : $m = 0, M = \infty$, coût 0. | A Sommet arrivée |
| (b) arcs de retour | : $m = 0, M = \infty$, coût 150. | D Sommet départ |
| (c) arcs de servitude | : $m = 0, M = \infty$, coût 0. | C Ciel |
| (d) arcs ciel-terre | : $m = M = 1$, coût 0. | |
| (e) arcs terre-ciel | : $m = M = 1$, coût 0. | |
| (f) arcs de fermeture | : $m = 0, M = \infty$, coût 0. | |
| (g) arcs d'accrochage possible | : $m = 0, M = \infty$, coût 0. | |
| (h) arcs de convoyage possible | : $m = 0, M = \infty$, coût 1. | |

(m et M désignent les bornes inférieure et supérieure attachées à chaque arc; on a considéré ici $c = 2$ catégories de vols, de sorte que l'on doit tenir compte de $2c = 4$ bases fictives).

Un flot optimal (0 partout sauf sur les flèches épaisses où il vaut 1) dans le graphe ci-dessus qui figure l'exemple du programme de 4 vols dans la semaine a généré le convoyage A_1-D_1 et l'accrochage A_2-D_2 .

Figure 4

Ce convoyage permet de gagner un avion ($N1 - N2 = 1$).

Pour permettre l'exécution successive par le même avion de deux mouvements de catégories différentes, on procède à la construction d'*arcs d'accrochage possible* (g) (lorsque les deux mouvements ont lieu sur le même aéroport) et d'*arcs de convoyage possible* (h) (lorsque les mouvements ont lieu l'un à ORY, l'autre à CDG). Dans ce but, on applique à chaque sommet arrivée x , de catégorie k et d'horaire fictif $t_f(x)$ [horaire réel : $t(x)$], l'opération suivante : sur chaque base fictive l différente de k , on cherche le premier départ y s'il existe, susceptible d'être accompli après l'arrivée x par le même avion, c'est-à-dire tel que :

$$t(y) - t(x) \geq T(k, l),$$

ou encore

$$t(y) - t_f(x) \geq T(k, l) - T(k, k).$$

On construit l'arc (x, y) . Ainsi, le sommet arrivée x de la base fictive k est relié par *un seul arc* à la base fictive l ($l \neq k$) : on n'a de la sorte retenu comme arc d'accrochage ou de convoyage possible (entre x et la base l) que le plus « vertical » afin de ne négliger aucun enchaînement admissible de vols. Au total, on construit au plus, sur chaque sommet arrivée x , $c - 1$ arcs d'accrochage possible et c arcs de convoyage possible.

Remarques :

1. Lorsque $l = k$, la condition ci-dessus devient : $t(y) - t_f(x) \geq 0$. L'accrochage est donc représenté par les arcs horizontaux déjà construits. C'est pourquoi on a remplacé les horaires réels des arrivées par des horaires fictifs.

2. En pratique, si x' est une arrivée de catégorie k antérieure à x , et si l'arc (x, y) a été construit, il est inutile de construire l'arc (x', y) .

3. En outre, des arcs de convoyage sont construits en début de semaine (abscisse 0 de chaque base fictive) d'un aéroport vers l'autre. Lorsque d'autre part y n'existe pas sur la base l , on relie x à la fin de semaine (extrémité droite de la base fictive l) si k et l ne sont pas relatifs au même aéroport. Si y n'existe pas et si k et l correspondent au même aéroport, aucun arc d'accrochage n'est construit car il serait sans objet : ce sont les arcs de *convoyage* possible que nous venons de décrire qui permettront un éventuel (cf. 2.1) rééquilibrage.

4. Il est nécessaire dans notre graphe de démultiplier les deux aéroports parisiens en $2c$ bases fictives pour la raison suivante : les contraintes de temps de transit minimal $[T(k, l)]$ pour un accrochage sont en effet subordonnées *à la fois* au type de vol k de l'arrivée et au type de vol l du départ susceptibles d'être effectués par un même avion (temps minimum d'escale entre les deux vols). Joindre tous les sommets-mouvements relatifs à un aéroport parisien (ORY ou CDG) par des arcs horizontaux le long d'un axe unique aurait implicitement admis une *transitivité* des accrochages :

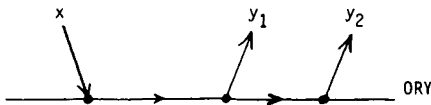


Figure 5 a

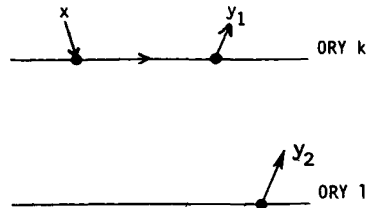


Figure 5 b

ainsi, si x et y_1 sont du type k tandis que y_2 est du type l , et si l'accrochage $(x-y_1)$ est possible, la figure 5 a autorise aussi l'accrochage $(x-y_2)$ qui peut ne pas être admissible. Le schéma des bases fictives que nous avons adopté (fig. 5 b) est quant à lui capable de tenir compte de ce genre de contraintes, puisque l'arc de liaison ne sera établi que si l'accrochage $(x-y_2)$ est possible ($t(y_2) - t(x) \geq T(k, l)$).

Il reste à munir chaque arc de bornes inférieure et supérieure, et d'un coût. Le passage d'une unité de flot dans un arc horizontal, dans un arc ciel-terre ou terre-ciel, ou dans un arc d'accrochage ou de convoyage possible, est destiné à représenter l'accomplissement de la mission correspondante par un appareil. L'exécution des vols commerciaux étant impérative, les bornes inférieure m et supérieure M du flot dans les arcs ciel-terre et terre-ciel sont prises égales à 1. Sur les autres arcs, on prend une borne inférieure m nulle et une borne supérieure M infinie. Les coûts doivent être choisis de manière à atteindre les objectifs décrits en 2.1, en respectant l'ordre de leurs priorités. Comme on le verra, les flots sur les arcs de retour sont liés à l'effectif minimal de la flotte qui assure les vols. On impose donc sur les arcs de retour un grand coût P . Le nombre des convoyages générés devant être le plus petit possible, on impose un coût p sur les arcs de convoyage possible. Sur les autres arcs, on prend un coût nul. On choisit le coût p petit par rapport à P : plus précisément, le rapport P/p évalue le nombre de convoyages qu'on est prêt à accepter pour gagner un avion sur la semaine. La pénalisation p est non nulle, car un convoyage (contrairement à un accrochage) entraîne une certaine dépense (temps de vol, carburant,...).

Dans le graphe ainsi construit, on fait passer un flot admissible de coût minimal. La liste C recherchée se compose des convoyages dont les arcs associés portent un flot non nul : la valeur de ce flot représente le nombre d'avions à convoier; l'horaire est figuré par l'abscisse sur chaque base fictive des extrémités de l'arc de convoyage.

3.2. Justification de la méthode

3.2. a. Le problème du rééquilibrage

Les quatre arcs de fermeture (f) servent à atteindre l'objectif de rééquilibrage du nombre d'avions sur chaque aéroport entre début et fin de période. Commençons par raisonner comme si les arcs de convoyage possible n'existaient pas. Les arcs d'accrochage possible ne nous gênent pas; dans un but de simplification de la représentation graphique, nous prenons $c = 1$.

D'abord, lorsque le flot optimal est obtenu, il est nécessairement nul dans l'un des arcs f_1 et f_2 . S'il ne l'était pas, on pourrait diminuer le flot dans le circuit (f_1, f_2, b_1) , ce qui abaisserait le coût de la solution. De même pour

les arcs f_3 et f_4 . Ainsi, le flot dans l'arc f_1 (resp. f_3) représente l'excédent des arrivées sur les départs à la base ORY (resp. CDG); le flot dans l'arc f_2 (resp. f_4) représente l'excédent des départs sur les arrivées à la base ORY (resp. CDG).

On se convainc alors aisément de la conservation du flot au ciel C .

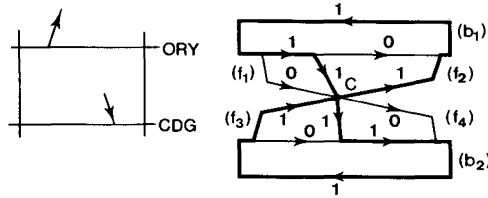


Figure 6

En l'absence de convoyage.

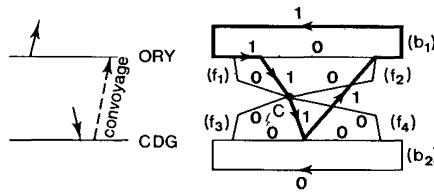


Figure 7

Avec convoyage.

Le problème du rééquilibrage ne peut bien évidemment être résolu que si les flots dans les arcs f_1 et f_4 , ou bien f_2 et f_3 , ne sont pas nuls.

Dans ce cas, il est effectivement résolu par notre méthode, puisqu'un convoyage adéquat entraîne une diminution du flot sur l'un des arcs de retour (fig. 7).

Il importe, à ce niveau, d'avoir introduit deux arcs de retour (b) (un pour chaque aéroport), plutôt qu'un arc de retour unique, comme le montre la figure 8. Un tel modèle n'aurait pas assuré le rééquilibrage à ORY et CDG.

3.2. b. Le nombre d'avions nécessaires

On se trouve maintenant dans l'une des situations suivantes : ou bien les flots dans les arcs f_1 et f_3 sont nuls, auquel cas les flots sur les arcs de retour b_1 et b_2 représentent le nombre d'avions au sol respectivement à ORY et CDG en début de période; ou bien les flots dans les arcs f_2 et f_4 sont nuls, auquel cas les flots sur les arcs de retour b_1 et b_2 représentent le nombre d'avions au

sol respectivement à ORY et CDG en fin de période. Or la différence entre le nombre M1 d'avions au sol à Paris (ORY + CDG) en début de période et le nombre M2 d'avions au sol à Paris en fin de période, précisément égale à l'excédent des départs sur les arrivées à Paris, ne dépend pas du nombre de convoys effectués (chaque convoi se traduit par un départ et une arrivée à Paris). Il est donc équivalent de minimiser M1 ou M2.

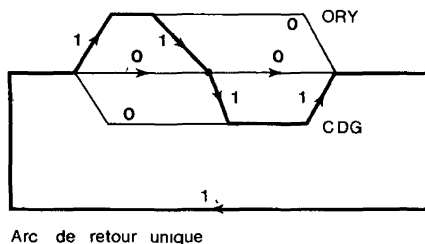


Figure 8

Compte tenu du grand coût de passage P imposé sur les arcs de retour, on y minimise le flot en priorité de sorte que l'on minimise ainsi M1 ou M2.

Enfin, les convoys, mouvements intérieurs à l'escale Paris, n'ont aucun effet sur le nombre d'avions qui sont, soit en vol, soit basés à l'extérieur de Paris en début ou en fin de période. On est donc amené à la conclusion suivante : on minimise bien le nombre total d'avions nécessaires pendant la période.

3. 2. c. Le nombre de convoys

La minimisation du nombre de convoys à réaliser est opérée par le coût p , faible mais non nul, imposé sur les arcs de convoys possibles.

4. CONCLUSION. RÉSULTATS

Le modèle utilisé a été programmé en FORTRAN sur un système conversationnel utilisé par Air France. La méthode choisie pour l'optimisation du flot est l'algorithme « Out of Kilter » de Fulkerson, dont on a utilisé la version programmée par J. M. Pla, conseiller scientifique à la S.N.C.F.

Dans l'exemple considéré, le paramètre c a été pris égal à 13. Le nombre d'arcs construits et le temps d'exécution varient selon l'ampleur du programme de vols : pour fixer un ordre de grandeur, on peut mentionner 1 000 arcs, et une centaine de secondes en unité centrale sur IBM 360/50.

De manière plus précise on peut indiquer, pour deux exemples, le nombre des arcs de chaque type que l'on a construits (semaine du 30 juin 1975).

	FLOTTE BOEING 747	FLOTTE BOEING 727
Nombre de mouvements à ORY	43	132
Nombre de mouvements à CDG	102	351
Nombre de sommets du graphe	176	514
Nombre d'arcs d'accrochage possible	15	0
Nombre d'arcs de convoyage possible	38	226
Nombre total d'arcs	402	1.250

Pour la flotte des Boeing 727, aucun arc d'accrochage possible n'est généré parce que tous les vols sont de la même catégorie (moyen-courriers de même équipement commercial) sur chaque aéroport, de sorte que seules 2 des $2c = 26$ bases fictives comportent des sommets-mouvements. Le dimensionnement $c = 13$ constitue un maximum compatible avec les flottes de la Compagnie les plus « hétérogènes » quant aux différentes catégories de vols.

Moyennant la démultiplication de ORY et CDG en 26 bases fictives, notre méthode a ainsi l'avantage de prendre en compte toutes les contraintes de temps minimal exposées au paragraphe 2.2.

L'utilisation d'un graphe dual aurait permis d'intégrer des contraintes quelconques de manière individuelle : les sommets représentent alors des vols, et on relie le sommet p au sommet q par l'arc (p, q) si et seulement si le vol q peut être accompli après le vol p par le même avion.

Malheureusement, un tel graphe dual comporte, pour un programme de vols de la Compagnie sur une semaine, plusieurs centaines de milliers d'arcs; aussi la méthode duale a-t-elle été rejetée.

Les résultats se présentent sous forme d'une liste C de convoyages à adjoindre au programme des vols commerciaux. Si certains des convoyages proposés ne conviennent pas (contraintes extérieures au modèle : personnel navigant, fermeture d'aéroport, etc.), l'utilisateur peut les interdire (borne supérieure M ramenée à 0 sur les arcs correspondants) et une nouvelle solution est alors recherchée (on fait passer un flot optimal dans le graphe transformé). Le modèle envisagé permet ainsi, au travers d'un système conversationnel, de tirer le meilleur parti de la souplesse et de l'efficacité du dialogue homme-machine.

BIBLIOGRAPHIE

- A. CHAMORRO, *Optimisation d'une flotte aérienne par la méthode « ATEM »*, Rev. d'inform. et Rech. Opérat., 3^e année, V-3, 1969.
- L. R. FORD et D. R. FULKERSON, *Flows in networks*, Princeton University, 1962.
- B. ROY, *Algèbre moderne et théorie des graphes*, Dunod, Paris, 1970.
- J. SURMONT, *Application de deux algorithmes de Ford et Fulkerson dans un problème propre aux chemins de fer*, Rev. franç. Rech. Opérat., 2^e trimestre 1966, n° 39.