Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

G. Gourevitch

Essai de formalisation du problème de l'opportunité d'une force de dissuasion nucléaire pour un pays de moyenne puissance

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 10, n° V2 (1976), p. 107-122.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1976__10_2_107_0>

© AFCET, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle
(vol. 10, n° 6, juin 1976, p. 107 à 122)

ESSAI DE FORMALISATION DU PROBLÈME DE L'OPPORTUNITÉ D'UNE FORCE DE DISSUASION NUCLÉAIRE POUR UN PAYS DE MOYENNE PUISSANCE (*)

par G. GOUREVITCH (1)

Résumé. — *La situation d'un pays donné peut être caractérisée par un « vecteur-état » à trois composantes, la première étant égale à la probabilité de conserver son intégrité vis-à-vis de la puissance pouvant la menacer. Toute entreprise politico-militaire doit avoir pour but d'augmenter la valeur de cette composante, ou du moins la conserver.*

Il s'agit de déterminer dans quel sens l'introduction de l'arme nucléaire la fait varier, compte tenu des diverses éventualités susceptibles de se présenter pour un pays de moyenne puissance.

Des hypothèses concernant leurs probabilités a priori *ont été faites, dont la plupart sont basées sur un consensus suffisamment large. Elles établissent des relations d'ordre entre ces probabilités permettant d'énoncer des conclusions concernant la politique à suivre dans des conditions se rapprochant passablement de la réalité.*

I. INTRODUCTION

La question de la possession d'une arme nucléaire pour un pays comme la France, soulève aujourd'hui bien des passions. Les arguments lancés de part et d'autre ressortissent souvent à des éléments étrangers à la rationalité, sont toujours partiels, et omettent les faits contraires à la thèse soutenue.

Si on désire entreprendre une étude ayant un certain caractère de rigueur, il faut se résigner à écarter tout d'abord l'aspect moral aussi estimable qu'il soit. Ce n'est pas parce que sa prise en considération ne puisse pas participer à l'élaboration d'une décision, mais parce qu'il n'est pas susceptible d'un traitement essentiellement logique.

Il reste le contexte géo-politique. Dès lors le problème fondamental de l'opportunité d'une force de dissuasion peut être formulé de la façon suivante : est ce que l'acquisition d'une telle force augmente ou non la probabilité du maintien de l'indépendance du pays considéré.

(*) Reçu mai 1975.

(1) Directeur des Études de l'O.R.T. Montreuil.

Une question subsidiaire peut se poser à celui qui entreprend l'étude de la question fondamentale : est-ce que la réponse à cette dernière peut être donnée en suivant la méthode scientifique ?

Nous allons tenter de répondre à ces questions en nous restreignant peut-être à des conditions particularisées. Mais une telle tentative, si elle est menée à bonne fin permettrait déjà d'espérer qu'une réponse de telle nature tenant compte de la généralité des faits est dans le domaine du possible.

Les raisonnements qui vont suivre auront les caractéristiques suivantes. Nous formaliserons le problème particularisé que nous poserons. Entre les grandeurs ainsi formalisées nous admettrons certaines relations d'égalité ou d'ordre. Ces relations seront affirmées exactes lorsqu'elles seront susceptibles d'un consensus quasi général. C'est d'ailleurs à ce stade que des critiques éventuelles pourraient être avancées. Enfin nous soumettrons à un traitement mathématique des relations admises pour en déduire des conséquences dont l'essentiel tendrait à donner une réponse à la question fondamentale.

Une telle approche, outre une correction plus sévère des déductions que permet la formalisation, a l'avantage de pouvoir tenir compte d'un ensemble de données de complétude satisfaisante. En effet, lors du traitement rationnel des relations de base, le scrupule d'une spéculation exacte exige que l'on tienne compte de facteurs qui pourraient échapper lors d'un traitement superficiel du problème en langage courant.

Notons qu'une étude basée sur la théorie des jeux a été effectuée par des spécialistes français, par imitation de leurs collègues américains sur les diverses incidences des « réponses graduées » à des attaques conventionnelles ou atomiques faites par l'une ou l'autre des parties en présence. Mais ces tentatives ont pour fondement la possession des armes nucléaires par les participants au jeu et ne mettent pas en question le principe de cette possession. D'autre part ces études ne s'appliquent qu'à des pays dont la panoplie nucléaire est très diversifiée et où est permise une grande souplesse d'emploi. Ce n'est pas pour le moment, le cas de notre pays.

II. PREMIÈRES CONSÉQUENCES DES HYPOTHÈSES DE BASE

Nous allons donc étudier en particulier, le comportement d'un pays p vis-à-vis d'un pays P_1. On suppose que P_1 est muni d'un armement nucléaire à effet infini et que son armement classique est très nettement supérieur à celui du pays p. Un pays P_2 à armement nucléaire également à effet infini peut avec une certaine probabilité assurer une couverture à p. Autrement dit, en cas de menace à l'indépendance de p, P_2 est susceptible d'intervenir pour défendre p avec tous ses moyens (on suppose que ces moyens sont essentiellement nucléaires, l'armement classique de P_2 étant admis de loin inférieur à celui de P_1).

Le but de la Défense Nationale de p consiste à lui conserver l'état E_1 (indépendance) et éviter qu'il prenne l'état E_2 (domination par P_1).

Il existe encore un état à considérer soit E_3 où le pays p n'existe plus comme tel par suite du massacre total ou très important de sa population (dû à une série de bombardements nucléaires par exemple).

Il est à noter que E_3 a été réalisé historiquement, avant l'invention de la bombe atomique, lors des tentatives de suppression de certaines ethnies (juifs, arméniens, tziganes etc.).

Nous prendrons comme unité de temps la durée d'un intervalle bien défini (une année par exemple) et nous allons prendre en compte les probabilités de passage d'un état à un autre sur deux intervalles de temps consécutifs.

Soit $P_i^j(k)$ la probabilité de passage de l'état E_i à l'état E_j sur les intervalles de temps k, $k+1$. Les probabilités ainsi introduites dépendent des événements historiques à chaque moment. Nous estimons comme évident que pour tout k :

$$\begin{cases} P_3^j(k) = 0 & \text{si} \quad j \neq 3, \\ P_3^3(k) = 1. \end{cases}$$

Autrement dit à partir de l'état E_3 il est impossible de revenir aux états E_1 et E_2.

Les probabilités $P_j^3(k)$ étaient quasi nulles avant les applications militaires de l'atome [la disparition brusque d'une ethnie étant rarissime, et la disparition progressive supposant des $P_j^3(k)$ de valeur faible]. On ne peut plus en dire autant à l'époque actuelle.

Soit $x_i^{(k)}$ la probabilité du pays p de se trouver dans l'état E_i à l'époque k. Le vecteur état est alors défini par le triplet ordonné $\{x_1^{(k)}; x_2^{(k)}; x_3^{(k)}\}$. Il correspond à l'époque k.

Le vecteur état initial, à savoir $\{x_1^{(0)}; x_2^{(0)}; x_3^{(0)}\}$ sera pris égal à $\{1; 0; 0\}$.

Pour passer du vecteur état de l'époque k, au vecteur état de l'époque $k+1$ il suffit de multiplier le premier vecteur par la matrice stochastique $[P_j^i(k)]$ ([1]) dite matrice de passage.

Nous obtenons formellement :

$$\{x_1^{(k+1)}; x_2^{(k+1)}; x_3^{(k+1)}\} = \{x_1^{(k)}; x_2^{(k)}; x_3^{(k)}\} \begin{bmatrix} P_1^1(k) & P_1^2(k) & P_1^3(k) \\ P_2^1(k) & P_2^2(k) & P_2^3(k) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cette égalité matricielle est équivalente à la suite des égalités :

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} P_1^1(k) + x_2^{(k)} P_2^1(k), \\ x_2^{(k+1)} &= x_1^{(k)} P_1^2(k) + x_2^{(k)} P_2^2(k), \\ x_3^{(k+1)} &= x_1^{(k)} P_1^3(k) + x_2^{(k)} P_2^3(k) + x_3^{(k)}. \end{aligned}$$

([1]) Une matrice est dite stochastique si la somme des termes de chaque ligne est égale à 1.

On peut vérifier facilement que

$$x_1^{(k+1)}+x_2^{(k+1)}+x_3^{(k+1)}=1$$

pour tout k. C'est une conséquence évidente des propriétés des matrices stochastiques. *Le but poursuivi par toute politique de défense est de maximiser les $x_1^{(k)}$ pour tout k.*

Effectuons la somme des deux premières composantes du vecteur état :

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)}+x_2^{(k+1)} &= x_1^{(k)}P_1^1(k)+x_2^{(k)}P_2^1(k)+x_1^{(k)}P_1^2(k)+x_2^{(k)}P_2^2(k) \\ &= x_1^{(k)}[1-P_1^3(k)]+x_2^{(k)}[1-P_2^3(k)] < x_1^{(k)}+x_2^{(k)}, \end{aligned}$$

D'où $x_3^{(k+1)} > x_3^{(k)}$.

Il en résulte que la *probabilité pour le pays d'arriver à l'état E_3 croît constamment.* Cette croissance est plus rapide depuis 1945 puisque $P_1^3(k)$ et $P_2^3(k)$ ne sont plus des quantités négligeables.

Faisons, à présent, l'hypothèse que la politique militaire suivie soit celle qui prend comme slogan « plutôt la mort que l'esclavage ». Autrement dit c'est une politique qui consiste à transférer la probabilité $P_1^2(k)$ pour tout k au profit de $P_1^3(k)$.

D'une façon précise nous admettrons que la suite des probabilités $P_1^1(k)$ reste identique à celle considérée précédemment et que la suite des $P_1^2(k)$ est identiquement nulle. Ainsi la suite des $P_1^3(k)$ est remplacée par la suite

$$P'^3_1(k) = P_1^2(k)+P_1^3(k).$$

La deuxième composante du vecteur état est alors constamment nulle. En effet elle l'est pour $k=0$ puisque le vecteur initial est $\{1;0;0\}$.

Supposons qu'elle le soit à l'époque k. Soit $x_1'^{(k)}$; $x_2'^{(k)}$; $x_3'^{(k)}$ les nouvelles composantes du vecteur état à l'époque k :

$$\{x_1'^{(k+1)};\ x_2'^{(k+1)};\ x_3'^{(k+1)}\} = \{x_1'^{(k)};\ 0;\ x_3'^{(k)}\}\begin{bmatrix} P_1^1(k) & 0 & P_1'^3(k) \\ P_2^1(k) & P_2^2(k) & P_2^3(k) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$x_2'^{(k+1)}=0.$$

C. Q. F. D.

Évaluons $x_1'^{(k+1)}$. Nous obtenons : $x_1'^{(k)}P_1^1(k)$.

Or, en se référant à l'expression de $x_1^{(k+1)}$ nous voyons que

$$x_1^{(k+1)} > x_1^{(k)}P_1^1(k),$$

le deuxième terme de l'expression donnant $x_1^{(k+1)}$ étant essentiellement positif. On trouve alors par facile récurrence

$$x_1'^{(k+1)} = P_1^1(1)P_1^1(2)\ldots P_1^1(k)$$

et

$$x_1^{(k+1)} > P_1^1(1)\,P_1^1(2)\ldots P_1^1(k).$$

D'où

$$x_1^{(k+1)} > x_1'^{(k+1)}.$$

La conclusion est immédiate. La politique militaire précédemment définie est *contraire au but poursuivi* [à savoir maximiser les $x_1^{(k)}$].

Mais supposons qu'on suive une politique plus « fine » bien que de même tendance que précédemment. Il s'agit de diminuer les chances d'une invasion par les moyens classiques au prix d'une augmentation du risque d'une destruction massive. Par conséquent on diminue les probabilités $P_1^2\,(k)$ au profit des $P_1^3\,(k)$, les probabilités $P_1^1\,(k)$ restant inchangées.

Soit $P_1'^2\,(k)$ et $P_1'^3\,(k)$ les nouvelles probabilités. Nous admettrons donc que

$$\left.\begin{array}{l} P_1'^2\,(k) < P_1^2\,(k) \\ P_1'^3\,(k) > P_1^3\,(k) \end{array}\right\} P_1'^2\,(k) + P_1'^3\,(k) = P_1^2\,(k) + P_1^3\,(k) \quad \text{pour tout } k.$$

Les autres éléments de la matrice stochastique ne sont pas modifiés. On obtient alors en désignant encore par $x_1'^{(k)}$, $x_2'^{(k)}$, $x_3'^{(k)}$, les nouvelles composantes du vecteur état à l'époque k :

$$x_2'^{(k+1)} = x_1'^{(k)}\,P_1'^2\,(k) + x_2'^{(k)}\,P_2^2(k),$$
$$x_1'^{(k+1)} = x_1'^{(k)}\,P_1^1\,(k) + x_2^{1(k)}\,P_2^1(k).$$

Raisonnons par récurrence; supposons

$$x_2'^{(k)} < x_2^{(k)} \qquad \text{et} \qquad x_1'^{(k)} \leqq x_1^{(k)}.$$

On en déduit immédiatement que

$$x_2'^{(k+1)} < x_2^{(k+1)},$$
$$x_1'^{(k+1)} < x_1^{(k+1)}.$$

[chaque terme des expressions de $x_2'^{(k+1)}$ et $x_1'^{(k+1)}$ étant respectivement inférieur ([1]) au terme correspondant des expressions de $x_2^{(k+1)}$ et $x_1^{(k+1)}$].

Or

$$x_2'^{(1)} = P_1'^2\,(0),$$
$$x_1'^{(1)} = P_1^1\,(0).$$

Ainsi

$$x_2'^{(1)} < x_2^{(1)},$$
$$x_1'^{(1)} = x_1^{(1)}.$$

([1]) Sauf le 1er terme de l'expression de $x_1'^{(k+1)}$ pour lequel on peut écrire « inférieur ou au plus égal ».

juin 1976.

Il en résulte que pour tout $k \geqq 1$:

$$\left.\begin{array}{l} x_2'^{(k)} < x_2^{(k)} \\ x_1'^{(k)} < x_1^{(k)} \end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad x_3'^{(k)} > x_3^{(k)}.$$

Ainsi toute politique tendant à augmenter le risque d'une destruction massive, même si elle diminue celui d'une attaque conventionnelle est *contraire au but poursuivi.*

Une politique militaire toute différente peut être adoptée. On essayerait d'éviter, avant tout, le risque de destruction massive du pays p, bien entendu au prix d'une augmentation importante du risque de domination par le pays P_1 et même d'une diminution (mais supposée faible) des chances de conserver l'indépendance.

Ces hypothèses se traduisent par les inégalités :

$$P_1'^1(k) \lesssim P_1^1(k)$$

(les accents désignent les nouvelles probabilités) :

$$P_1'^2(k) > P_1^2(k),$$

$$P_1'^3(k) < P_1^3(k) \quad \text{pour tout } k.$$

Nous supposerons en outre que le pays p possède des fortes traditions démocratiques et un sentiment patriotique élevé, ce qui se traduit par d'assez fortes valeurs des probabilités $P_2^1(k)$. Nous pouvons alors écrire :

$$x_1'^{(1)} = P_1'^1(0) \lesssim x_1^{(1)} \qquad \text{d'où} \quad \delta x_1'^{(1)} \lesssim 0,$$

$$x_2'^{(1)} = P_1'^2(0) > x_2^{(1)} \qquad \text{d'où} \quad \delta x_2'^{(1)} > 0$$

(δ désignant la variation de la variable correspondante) :

$$x_1'^{(2)} = x_1'^{(1)} P_1'^1(1) + x_2'^{(1)} P_2^1(1),$$

$$\delta x_1'^{(2)} = x_1'^{(1)} \delta P_1'^1(1) + P_1'^1(1) \delta x_1'^{(1)} + P_2^1(1) \delta x_2'^{(1)}.$$

Observons que pour $\delta P_1'^1(k) = 0$ (si $k = 0$; 1) la quantité $\delta x_1'^{(2)}$ est essentiellement positive; par continuité elle reste positive quand les $\delta P_1'^1(k)$ deviennent négatifs mais pour des modules faibles. Ainsi pour des diminutions suffisamment faibles de $P_1^1(0)$ et de $P_1^1(1)$ la probabilité $x_1'^{(2)}$ est supérieure ou tout au moins égale à $x_1^{(2)}$.

Les écarts sur $P_1^1(0)$ et $P_1^1(1)$ peuvent être d'autant plus grands que la probabilité $P_2^1(1)$ est forte.

On peut poursuivre de proche en proche ces considérations. On a

$$x_1'^{(k+1)} = x_1'^{(k)} P_1^1(k) + x_{(2)}'^{k} P_2^1(k),$$

$$\delta x_1'^{(k+1)} = \underbrace{x_1'^{(k)} \delta P_1'^1(k)}_{\text{1}^{\text{er}} \text{ terme}} + \underbrace{P_1'^1(k) \delta x_1'^{(k)}}_{\text{2}^{\text{e}} \text{ terme}} + \underbrace{P_2^1(k) \delta x_2'^{(k)}}_{\text{3}^{\text{e}} \text{ terme}},$$

$$x_2'^{(k+1)} = x_1'^{(k)} P_1'^2(k) + x_2'^{(k)} P_2^2(k),$$

$$\delta x_2'^{(k+1)} = \underbrace{x_1'^{(k)} \delta P_1'^2(k)}_{\text{1}^{\text{er}} \text{ terme}} + \underbrace{P_1'^2(k) \delta x_1'^{(k)}}_{\text{2}^{\text{e}} \text{ terme}} + \underbrace{P_{2(k)}^2 \delta x_2'^{(k)}}_{\text{3}^{\text{e}} \text{ terme}}.$$

Si tous les $\delta P_1'^1(k)$ sont nuls pour tout k, par applications successives des formules donnant les expressions de $\delta x_1'^{(k+1)}$ et de $\delta x_2'^{(k+1)}$ on voit que tous les termes des deuxièmes membres restent positifs, puisque les termes initiaux ayant comme facteurs $\delta x_1'^{(2)}$ et $\delta x_2'^{(1)}$ ($\delta x_1'^{(1)} = 0$) le sont.

Ainsi on a

$$\left.\begin{array}{l} \delta x_1'^{(k+1)} > 0 \\ \delta x_2'^{(k+1)} > 0 \end{array}\right\} \text{ pour tout } k.$$

Par continuité si les $\delta P_1'^1(k)$ ont des modules suffisamment petits, les $\delta x_1'^{(k)}$ et les $\delta x_2'^{(k)}$ conservent leur signe plus.

Ainsi la politique précédemment définie, se *révèle payante quant au but poursuivi*, pourvu que les probabilités de rester dans l'état E_1 ne diminuent que faiblement.

En conclusion des études précédentes, il s'agit d'éviter, avant tout, d'augmenter les risques d'une attaque nucléaire de la part du pays P_1 même au prix d'une certaine diminution de la capacité de résistance du pays p. La probabilité de se trouver dans l'état E_1 peut être, momentanément, diminuée, mais d'une façon négligeable.

III. ÉTUDE DU PROBLÈME FONDAMENTAL

Nous allons appliquer certaines des considérations précédentes au problème fondamental, qui nous intéresse au premier chef, à savoir celui de l'opportunité de la constitution d'un arsenal nucléaire pour le pays p. Bien entendu les hypothèses de base restent valables.

Nous désignerons par u le niveau atteint par l'armement nucléaire du pays p. Bien entendu u n'est pas une quantité mesurable, mais il est possible d'établir une relation d'ordre dans l'ensemble des niveaux u. Nous nous contenterons d'une telle propriété.

Nous désignerons par $\pi(k)$ la probabilité d'intervention du pays P_2 pour couvrir le pays p en cas d'attaque de la part du pays P_1 (lors de l'année k). L'intervention du pays P_2 serait essentiellement nucléaire, le niveau des armements classiques de P_2 étant supposé très inférieur à celui de P_1.

Il semble conforme au bon sens que $\pi(k)$ est d'autant plus petite que le niveau de la « force de frappe » du pays p est plus grand.

Nous allons admettre, le long de ce développement, que $\pi(k)$ est une fonction *décroissante de* u. Si $u = 0$, nous supposerons, ce qui correspond bien à la réalité du moment, ou prévisible dans un avenir proche, que $\pi(k) \simeq 1$.

Nous analyserons successivement les divers comportements des pays P_1 et p l'un envers l'autre, et nous en déduirons des conclusions concernant la question qui nous préoccupe.

Nous admettrons tout d'abord que les dirigeants du pays P_1 sont persuadés que leurs homologues du pays p ont, dans toutes les circonstances, un comportement rationnel, et que les dirigeants du pays p ont effectivement un tel comportement.

Ceci admis, faisons l'hypothèse d'une attaque classique ([1]) du pays P_1 contre le pays p, l'année 0. Quelle que soit l'attitude du pays P_2 l'alternative ci-contre se présente :

Ou bien il n'y a pas de réponse nucléaire de la part du pays p. La probabilité $P_1^1(k)$ diminue pour les valeurs de k ültérieures; il y a augmentation de la probabilité $P_1^2(k)$. Nous aurons (en mettant des accents aux nouvelles probabilités) :

$$x_1'^{(1)} = P_1'^{(1)}(0); \qquad x_2'^{(1)} = P_1'^{2}(0),$$

$$x_1'^{(2)} = x_1'^{(1)} P_1'^{1}(1) + x_2'^{(1)} P_2^1(1),$$

$$x_2'^{(2)} = x_1'^{(1)} P_1'^{2}(1) + x_2'^{(1)} P_2^2(1), \ldots,$$

On constate que $x_1'^{(1)}$ a diminué et $x_2'^{(1)}$ a augmenté par rapport aux valeurs correspondant aux conditions normales. Mais déjà pour $x_1'^{(2)}$ on voit que le deuxième terme est loin d'être négligeable puisque chaque facteur ne l'est pas. Il en est de même pour les valeurs ultérieures de k.

Ou bien il y a réponse nucléaire de la part de p. Alors :

$$P_1^1(k) \simeq P_1^2(k) \simeq 0 \qquad \text{et} \qquad P_1^3(k) \simeq 1.$$

En effet le pays P_1 réagirait immédiatement par la destruction du pays p. Désignons par des doubles accents les probabilités correspondantes

$$x_1''^{(1)} \simeq 0; \qquad x_2''^{(1)} \simeq 0; \qquad x_1''^{(2)} \simeq 0, \ldots$$

on en déduit, pour les valeurs ultérieures de k :

$$x_1''^{(k)} < x_1'^{(k)}.$$

([1]) Sous le terme « attaque classique » nous entendons : attaque menée au moyen d'armes classiques ou éventuellement nucléaires tactiques provoquant des dégâts très locaux, essentiellement aux installations militaires.

REMARQUE : désignons par u_1 un seuil de u dont la définition est la suivante : l'emploi de l'armement nucléaire par le pays p de niveau supérieur à u, déclanche chez P_1 des dommages considérés comme supérieurs aux avantages que ce pays aurait pour faire passer p de l'état E_1 à l'état E_2.

Dans les considérations que nous venons d'exposer nous nous plaçons dans l'hypothèse où $u \geqq u_1$, pour que la réaction de p puisse avoir quelque crédibilité.

Il est clair dès lors, qu'en cas d'attaque classique du pays P_1 le comportement rationnel (et effectif) des dirigeants de p consisterait à ne pas provoquer de riposte nucléaire.

Étudions, toujours dans le cadre de nos hypothèses de quelle façon varient les probabilités $P_1^1(k)$, $P_1^2(k)$ et $P_1^3(k)$ en fonction de u.

Ces probabilités dépendent de u de deux façons : comme fonctions composées par l'intermédiaire de $\pi(k)$ et directement. Il semble naturel d'admettre que la probabilité $P_1^1(k)$ est une fonction croissante de $\pi(k)$ et que la probabilité $P_1^2(k)$ est une fonction décroissante de $\pi(k)$.

Comme $\pi(k)$ est elle-même une fonction décroissante de u, on peut conclure que $P_1^1(k)$ est une fonction décroissante de u [par l'intermédiaire de $\pi(k)$] et que $P_1^2(k)$ est une fonction croissante de u.

Puisque les dirigeants de P_1 supposent que le comportement de leurs collègues de p est rationnel et qu'ils ont raison de le supposer, en cas d'attaque classique de P_1, le comportement de p est le même que u soit nul ou non. Il en résulte que dans cette éventualité $P_1^2(k)$ est indépendant de u [puisqu'une modification de $P_1^2(k)$ n'est possible qu'en cas d'attaque classique de p].

L'étude de $P_1^1(k)$ est un petit peu plus complexe. Cette probabilité dépend à la fois de la possibilité d'une attaque classique de P_1 et aussi de celle d'une attaque nucléaire.

Quant au premier terme de l'alternative la conclusion reste la même que pour $P_1^2(k)$. Quant au deuxième terme de l'alternative posons $\alpha(k)$ la probabilité d'une attaque nucléaire de P_1 sur p. Nous ne tiendrons pas compte, puisque nous l'avons déjà fait, de la fonction $\pi(k)$ et nous allons analyser uniquement la dépendance directe de $\alpha(k)$ par rapport au niveau u de l'armement nucléaire de p.

Notons d'abord que pour $u = 0$, $\alpha(k)$ a une valeur très faible, le pays P_1 ayant avantage à utiliser sa supériorité en armes classiques pour dominer p.

Si u augmente, nous devons prendre en compte le seuil u_1. Pour $u < u_1$, il est évident que $\alpha(k)$ est une fonction croissante de u, car il est tentant pour un pays P_1 de détruire un arsenal nucléaire naissant avant qu'il devienne réellement dangereux.

Pour $u \geqq u_1$, la perspective des représailles joue. On peut donc tenir l'effet « dissuasif » de l'arsenal nucléaire comme certain. La probabilité $\alpha(k)$ est alors une fonction décroissante, d'ailleurs d'une façon brusque à partir de u_1, du niveau u. Comme la valeur $\alpha(k)$ est très faible pour $u = 0$, cette probabilité ne peut pas descendre d'une façon appréciable au-dessous de cette valeur pour $u \geqq u_1$.

Ainsi pour $u = 0$ et $u \geqq u_1$, $\alpha(k)$ est très faible, donc peu influenceé par les variations de u. Il en est de même de $P_1^1(k)$. Pour $u \in]0; u_1[$ $\alpha(k)$ étant croissant, on en déduit que $P_1^1(k)$ est décroissant avec u. Bien entendu, on suppose ici que $P_1^1(k)$ est directement fonction de u.

Si on effectue la synthèse de tous ces résultats, on constate que les probabilités $P_1^1(k)$ et $P_1^2(k)$ dépendent uniquement du niveau u par l'intermédiaire de $\pi(k)$. Ceci est vrai pour tout u, s'il s'agit de $P_1^2(k)$ et pour $u \in [0; u_1]$ pour $P_1^1(k)$.

La probabilité $P_1^1(k)$ est alors une fonction décroissante et la probabilité $P_1^2(k)$ est une fonction croissante de u.

La décroissance de $P_1^1(k)$ est accentuée dans l'intervalle $]0; u_1[$, puisque c'est de plus, une fonction décroissante directe de u dans cet intervalle.

Avant d'évaluer l'avantage de l'armement nucléaire dans nos hypothèses, analysons le comportement de $P_1^3(k)$ en fonction de u. De même que $P_1^1(k)$ cette probabilité dépend à la fois d'une attaque classique de P_1 et aussi de celle d'une attaque nucléaire. Dans le deuxième cas la probabilité $P_1^3(k)$ se réduit à $\alpha(k)$ et nous avons étudié le comportement de cette dernière probabilité.

Dans le cas d'une attaque classique, comme nous avons vu que nos hypothèses conduisent à conclure que le comportement de p est le même que u soit égal ou différent de zéro, la dépendance directe de $P_1^3(k)$ par rapport à u ne se pose pas.

On doit envisager uniquement la dépendance par l'intermédiaire de $\pi(k)$. Soit alors $\varepsilon(k)$ la probabilité d'une attaque classique de P_1 sur p. Tout d'abord il ne faut pas confondre les probabilités $\varepsilon(k)$ et $P_1^2(k)$. En effet en cas d'attaque classique il peut se produire, soit l'état E_2, soit en cas de riposte de P_2, l'arrêt de l'agression, d'où maintien de l'état E_1, soit enfin, toujours en cas de riposte de P_2, l'état E_3 c'est-à-dire la destruction de p. En appelant $\beta(k)$ et $\lambda(k)$ ces deux dernières probabilités, nous avons bien

$$\varepsilon(k) = P_1^2(k) + \beta(k) + \lambda(k).$$

D'autre part, l'éventualité E_3 ne peut se produire qu'en cas d'une riposte de P_2 dont la probabilité, compte tenu de l'agression de P_1 est égale à $\pi(k)\,\varepsilon(k)$.

Nous avons donc

$$\pi(k)\,\varepsilon(k) = \beta(k) + \lambda(k) + q_1^2(k).$$

$q_1^2(k)$ étant la probabilité de passage de l'état E_1 à l'état E_2 dans le cas de l'agression de P_1 et de la riposte de P_2, mais celle-ci étant supposée trop timorée, ou s'arrêtant suffisamment tôt pour permettre la poursuite de l'action de P_1.

Nous supposerons, ce qui est conforme au bon sens, que les trois termes du second membre sont indépendants et que leurs variations s'effectuent dans le même sens que celles du produit $\pi(k)\,\varepsilon(k)$. Or pour $u = 0$, $\pi(k) \simeq 1$ donc $\varepsilon(k) \simeq 0$ (car une attaque classique de P_1 sur p devient inopérante).

Le produit $\pi(k)\,\varepsilon(k)$ est alors sensiblement nul. Ainsi pour $u \neq 0$ ce produit est supérieur ou au plus égal à la valeur qu'il prend pour $u = 0$.

Il en est donc de même pour $\lambda(k)$.

Nous pouvons observer, en outre, que le produit $\pi(k).\,\varepsilon(k)$ de toute façon ne peut atteindre des valeurs importantes vu l'éventualité sous-jacente de l'événement qu'il suppose. Comme la valeur de ce produit doit être répartie entre trois probabilités dont $\lambda(k)$, sans qu'il soit possible d'affirmer laquelle d'entre elles est plus grande que l'autre il est vraisemblable que la probabilité $\lambda(k)$ même à son maximum a une valeur relativement faible. Or $P_1^3(k) \simeq \alpha(k)+\lambda(k)$.

Le premier terme, comme nous l'avons vu est très faible sauf dans l'intervalle $]0; u_1[$. Le comportement du deuxième terme vient d'être analysé. Nous pouvons en déduire que la probabilité $P_1^3(k)$ pour $u \neq 0$ prend une valeur supérieure à celle qu'elle possède pour $u = 0$. Chacun des termes de $P_1^3(k)$ ayant une valeur peu élevée quel que soit $\pi(k)$ il en est de même de cette probabilité, du moins dans les hypothèses envisagées.

Évaluons, d'autre part, la probabilité $P_2^3(k)$; on peut écrire :

$$P_2^3 = q_2^3 + q_2'^3,$$

q_2^3 est la probabilité de destruction massive de p par P_1. Elle est assez faible si P_1 domine déjà p. Elle n'est pas nulle car elle dépend de la probabilité P_2^1 qui elle mesure la possibilité de la « résistance » des habitants du pays p à la domination de P_1. $q_2'^3$ est la probabilité de destruction massive de p par P_2. Elle est à envisager comme une amplification des faits de guerre accomplis par les alliés dans les pays occupés quand les positions stratégiques des occupants dans ces pays étaient essentielles. Elle n'est donc pas à écarter.

Finalement, les deux termes de P_2^3, bien que n'ayant pas une valeur très forte ne sont nullement négligeables. Il en est ainsi de la probabilité P_2^3 pour tout k.

Ainsi, dans les hypothèses envisagées à savoir le comportement rationnel attendu et réalisé des dirigeants de p, on peut affirmer que les deux probabilités $P_1^3(k)$ et $P_2^3(k)$ sont relativement faibles mais non négligeables.

Nous supposerons qu'elles sont de même ordre et que par suite leur différence $P_2^3 - P_1^3 \simeq 0$.

Pour la suite du raisonnement, il est utile d'examiner de plus près certains des éléments de la matrice stochastique.

Nous admettrons que les probabilités *du maintien* dans un état sont supérieures aux probabilités de *changement* d'un état dans un autre ce qui est conforme à l'expérience.

Ainsi $P_1^1 > P_1^2$; $P_1^1 > P_2^1$ (pour tout k).

De même $P_2^2 > P_2^1$; $P_2^2 > P_1^2$ (il s'agit, évidemment, des probabilités *a priori*, considérées à partir de l'année zéro).

Nous allons désigner par des accents les probabilités correspondant à $u \neq 0$. Nous avons

$$x_1'^{(1)} = P_1'^1(0), \qquad x_2'^{(1)} = P_1'^2(0),$$

$$x_1'^{(2)} = x_1'^{(1)} P_1'^1(1) + x_2'^{(1)} P_2^1(1),$$

$$x_2'^{(2)} = x_1'^{(1)} P_1'^2(1) + x_2'^{(1)} P_2^2(1).$$

Notons toujours par l'opérateur δ les différences des probabilités considérées pour $u = 0$ d'une part et $u \neq 0$ d'autre part.

Nous avons

$$\delta x_1'^{(1)} = \delta P_1'^1(0) < 0,$$

$$\delta x_2'^{(1)} = \delta P_1'^2(0) > 0,$$

$$\delta x_1'^{(2)} = x_1'^{(1)} \delta P_1'^1(1) + P_1'^1(1)\,\delta x_1'^{(1)} + P_2^1(1)\,\delta x_2'^{(1)},$$

$$\delta x_2'^{(2)} = x_1'^{(1)} \delta P_1'^2(2) + P_1'^2(2)\,\delta x_1'^{(1)} + P_2^2(1)\,\delta x_2'^{(1)}.$$

Comme pour tout k :

$$P_1'^1(k) < P_1^1(k),$$

$$P_1'^2(k) > P_1^2(k),$$

$$P_1'^3(k) \geqq P_1^3(k),$$

(à moins que $P_1'^3(k) \simeq P_1^3(k) \simeq 0$). On en déduit pour tout k :

$$\delta P_1'^1(k) < 0,$$

$$\delta P_1'^2(k) > 0,$$

$$\delta P_1'^3(k) \geqq 0,$$

mais comme

$$P_1'^1(k) + P_1'^2(k) + P_1'^3(k) = 1,$$

$$\delta P_1'^1(k) + \delta P_1'^2(k) = -\delta P_1'^3(k) \leqq 0 \quad \text{pour tout } k.$$

En particulier

$$\delta x_1'^{(1)} + \delta x_2'^{(1)} \leqq 0.$$

Montrons que

$$\delta x_1'^{(2)} < 0.$$

Nous pouvons écrire :

$$\delta x_1'^{(2)} = x_1'^{(1)}\,\delta P_1'^1(1) + P_1'^1(1)(\delta x_1'^{(1)} + \delta x_2'^{(1)}) + \delta x_2'^{(1)}(P_2^1(1) - P_1'^1(1)).$$

Nous constatons que chacun des trois termes est négatif. Effectuons la somme $\delta x_1'^{(2)} + \delta x_2'^{2}$. Nous obtenons l'expression suivante :

$$x_1'^{(1)}[\delta P_1'^1(1) + \delta P_2'^2(1)] + \delta x_1'^{(1)}[P_1'^2(1) + P_1'^2(1)] + \delta x_2'^{(1)}[P_2^1(1) + P_2^2(1)]$$
$$= x_1'^{(1)}[\delta P_1'^1(1) + \delta P_1'^2(1)] + \delta x_1'^{(1)}[1 - P_1'^3(1)] + \delta x_2'^{(1)}[1 - P_2^3(1)].$$

Or

$$P_1'^3(1) \leqq P_2^3(1) \quad \Rightarrow \quad 1 - P_1'^3(1) \geqq 1 - P_2^3(1).$$

Nous pouvons donc écrire l'expression sous la forme

$$x_1'^{(1)}[\delta P_1'^1(1) + \delta P_1'^2(1)] + [\delta x_1'^{(1)} + \delta x_2'^{(1)}][1 - P_2^3(1)] + \delta x_1'^{(1)}[P_2^3(1) - P_1'^3(1)].$$

Tous les termes étant négatifs, ou, au moins nuls, $\delta x_1'^{(2)} + \delta x_2'^{(2)}$ est négatif.

Il est évident que ce raisonnement peut se poursuivre par récurrence et entraîne le fait que les expressions de $\delta x_1'^{(k)}$ pour tout k, sont négatives.

La politique de l'armement nucléaire entraîne une diminution de $x_1'^{(k)}$ pour tout k dans les hypothèses envisagées et par conséquent est *contraire au but poursuivi.*

Supposons à présent, que les dirigeants du pays P_1 sont persuadés que leurs homologues du pays p ont un comportement rationnel, mais que ces derniers ne l'ont pas effectivement. Il existe donc une probabilité d'une réponse nucléaire de p à l'attaque classique de P_1.

Nous avions précédemment l'égalité

$$\varepsilon(k) = P_1^2(k) + \beta(k) + \lambda(k),$$

la signification de chaque terme ayant déjà été donnée. Cette égalité subsiste à condition de considérer la probabilité $\lambda(k)$ comme non seulement celle de la destruction de p par P_1 à la suite de la riposte de P_2, mais aussi à la suite de la riposte de p.

Dans ces conditions il est évident qu'il se produit un transfert d'une fraction de la valeur de $P_1^2(k)$ vers $\lambda(k)$, et par suite vers $P_1^3(k)$ dont $\lambda(k)$ constitue un des termes.

Un tel transfert est réalisé pour un niveau u quelconque. Sa valeur est évidemment plus grande pour $u \geqq u_1$ que pour $u < u_1$.

Nous avons déjà examiné les effets de ce transfert. Nous avons conclu à une diminution de $x_1'^{(k)}$; donc une telle politique est également contraire au but poursuivi puisqu'elle constitue une *accentuation* de la politique précédente.

Faisons une troisième hypothèse à savoir que le comportement des dirigeants du pays p est rationnel, mais que les dirigeants du pays P_1 n'en sont pas persuadés. Ils admettent qu'en cas d'attaque conventionnelle l'arsenal nucléaire de p peut être utilisé.

Dans ce cas cet arsenal peut avoir un certain effet dissuasif. La probabilité $\varepsilon(k)$ et par suite $P_1^2(k)$ (¹) est alors décroissante avec u (faiblement par $u < u_1$, plus fortement avec $u \geqq u_1$).

Pour $u \geqq u_1$ un tel effet est susceptible de contrebalancer l'effet de la croissance de $P_1^2(k)$ par l'intermédiaire de la probabilité $\pi(k)$.

Finalement on peut supposer que la probabilité $P_1^3(k)$ ne varie pas sensiblement et diminue plutôt avec $\lambda(k)$ (¹). La probabilité $P_1^2(k)$ est décroissante avec u. Il en résulte que la probabilité $P_1^1(k)$ est une fonction croissante de u. En désignant par un accent les probabilités pour $u > 0$, nous obtenons :

$$\text{(pour tout } k\text{)} \begin{cases} P_1'^1(k) > P_1^1(k), \\ P_1'^2(k) < P_1^2(k), \\ P_1'^3(k) < P_1^3(k) \qquad \text{d'où} \quad P_1'^3(k) < P_2^3(k), \end{cases}$$

d'où

$$\delta P_1'^1(k) > 0,$$
$$\delta P_1'^2(k) < 0,$$
$$\delta P_1'^3(k) < 0,$$

le symbole δ ayant toujours la même signification.

Remarquons que

$$\delta P_1'^1(k) + \delta P_1'^2(k) = -\delta P_1'^3(k) > 0.$$

D'où

$$\delta x_1'^{(1)} > 0; \qquad \delta x_2'^{(1)} < 0 \qquad \text{et} \qquad \delta x_1'^{(1)} + \delta x_2'^{(1)} > 0.$$

On montre d'une façon analogue à celle déjà effectuée que

$$\delta x_1'^{(2)} > 0,$$
$$\delta x_1'^{(2)} + \delta x_2'^{(2)} > 0,$$

et le raisonnement se poursuit par récurrence.

Ainsi pour tout k, $\delta x_1'^{(k)}$ est positif.

La politique suivie entraîne *l'augmentation* de $x_1'^{(k)}$ pour tout k. Elle est donc *conforme* au but poursuivi : la constitution d'un arsenal nucléaire diminue le risque de changement de l'état du pays p.

Il reste à examiner le cas intermédiaire où les dirigeants du pays P_1 ont tendance à croire que ceux du pays p peuvent éventuellement utiliser l'arme nucléaire en cas d'attaque classique, et qu'effectivement il existe une possibilité que les dirigeants de p ne suivent pas la voie la plus rationnelle et risquent d'employer cette arme.

(¹) En effet, la distribution dans $\varepsilon(k)$ des probabilités $P_1^2(k)$; $\beta(k)$, $\lambda(k)$ reste invariable, les comportements des pays p et P_2 étant inchangés.

Deux tendances contradictoires se manifestent : l'augmentation de la probabilité d'utilisation de l'arme nucléaire par le pays p diminue la probabilité $P_1^2(k)$ au profit de $P_1^3(k)$ et par conséquent tend à diminuer la probabilité $x_1(k)$ pour p de rester dans l'état E_1.

L'accentuation du degré de croyance des dirigeants de P_1 quant à l'utilisation de l'arme nucléaire par p, augmente l'effet dissuasif de cette arme et, comme nous l'avons montré, tend à augmenter la probabilité $x_1^{(k)}$.

Finalement il est difficile d'effectuer des évaluations quantitatives car les deux tendances dépendent des psychologies respectives des dirigeants des deux pays et il semble impossible de comparer au moyen d'inégalités les facteurs sus-indiqués.

Si on accepte nos prémisses, les éléments de l'étude précédente permettent d'affirmer que la possession d'un arsenal nucléaire par le pays p n'est utile qu'au cas où les dirigeants de ce pays au moyen d'une politique de « bluff » à l'égard de ceux du pays P_1 parviennent à les persuader qu'ils sont prêts à utiliser leur stock de bombes alors qu'en réalité gardant la tête froide ils le laisseront inutilisé (sauf évidemment en cas de destruction nucléaire de p au quel cas il n'y aurait plus rien à perdre).

Nous avons ainsi répondu à la question fondamentale que nous nous sommes posés au début. La question subsidiaire, à savoir la possibilité de traiter ces délicats problèmes au moyen d'une méthode scientifique suffisamment rigoureuse a été, à notre avis, également éclaircie. Même si certaines de nos prémisses ne rencontrent pas une adhésion complète, nous avons montré que d'importantes questions se rapportant à notre sujet sont susceptibles d'être formalisées et traitées mathématiquement.

Citons une dernière objection des partisans inconditionnels de la politique nucléaire en toutes circonstances : la mise au point de l'arme nucléaire est très longue. Les modifications doivent être continuelles afin que le retard technologique entre les réalisations du pays intéressé et les super-puissances ne soit pas trop grand. Il est possible que les conditions d'utilisation prises en compte à un moment donné soient modifiées du tout au tout, au bout d'un laps de temps suffisamment long. Il serait alors trop tard, même s'il se révèle alors nécessaire, d'entreprendre un effort vers l'armement nucléaire.

Nous pouvons d'abord noter que, quelle que soit la période où on entreprend la réalisation d'un arsenal nucléaire, le délai d'accession au niveau u_1, le seul à prendre en compte pour un pays de moyenne puissance comme p, est relativement rapide. Les contre-moyens de parade contre une attaque nucléaire, susceptibles de faire varier vers le haut ce niveau ne sont apparemment pas prêts à être utilisés vu l'insuffisance actuelle et proche future des études et surtout le coût prohibitif des installations adéquates. Il ne s'agit donc pas de combler un retard technologique, de toute façon destiné à s'agrandir de plus en plus par suite du décalage des moyens financiers, mais d'atteindre précisément le niveau u_1, but à la portée relativement aisée.

juin 1976.

D'autre part, rien n'empêche d'entreprendre des études systématiques s'appuyant sur des méthodes rigoureuses dont la possibilité vient d'être prouvée, en faisant varier les prémisses à l'intérieur d'un champ suffisamment large, pour pouvoir prévoir la plupart des hypothèses que l'on pourrait raisonnablement imaginer.

A partir de telles études on pourrait conclure à la nécessité de telle ou telle politique à longue échéance si celle-ci peut être effectivement appliquée.

Mais peut-elle l'être, de toute façon, dans notre pays ? Au fond il suffit d'un changement de majorité, éventualité dont la probabilité est loin d'être négligeable pour que la politique nucléaire actuelle soit fondamentalement changée peut-être pour des motifs qui sont aussi éloignés de la raison raisonnante, que ceux qui sont évoqués par les tenants actuels du pouvoir.