Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

B. Lemaire

Brèves communications. Une démonstration directe de la formule de Pollaczek-Khintchine

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 12, nº 2 (1978), p. 229-231.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1978__12_2_229_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
vol. 12, n° 2, mai 1978, p. 229 à 231)

Brèves Communications

UNE DÉMONSTRATION DIRECTE DE LA FORMULE DE POLLACZEK-KHINTCHINE (*)

par B. LEMAIRE (1)

Résumé. — *On donne une démonstration directe de la formule de Pollaczek-Khintchine qui exprime l'attente moyenne pour la file* M/G/1 *fondée sur l'emploi des méthodes de conservation.*

LEMME : *Pour la file* M/G/1 *en régime transitoire ou permanent, la probabilité* $p_n(t)$ *(notée* p_n *en régime permanent) pour que n clients soient présents dans le système à l'instant t est égale à la probabilité* $q_n(t)$ *(notée* q_n *en régime permanent) pour que, lors de son arrivée dans le système, un nouveau client y trouve n clients déjà présents.*

Démonstration [1, 3] :

$$\begin{aligned}
q_n(t) &= \lim_{h\to 0} \Pr\{n \text{ clients présents à } t \mid \text{une arrivée entre } t \text{ et } t+h\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\Pr\{\text{une arrivée entre } t \text{ et } t+h \mid n \text{ clients à } t\}.\Pr\{n \text{ clients à } t\}}{\Pr\{\text{une arrivée entre } t \text{ et } t+h\}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[\lambda h + 0(h)].p_n(t)}{\lambda h + 0(h)} = p_n(t).
\end{aligned}$$

Car la loi de Poisson des arrivées, de taux noté λ, est un processus à accroissements indépendants : les arrivées dans l'intervalle $[t, t+h]$ ne sont pas conditionnées par celles survenues entre 0 et t.

Comme le remarque Krakowski [3], cette propriété est fausse pour les files limitées à N clients. En effet, pour $n = N$, on a en régime permanent : $q_N = 0$ et $p_N \neq 0$; on peut montrer que : $q_n = p_n/(1-p_N)$ pour le cas M/M/1.

FORMULE DE POLLACZEK-KHINTCHINE

Nous donnons ci-dessous une démonstration directe de cette formule, qui précise une preuve de Krakowski [3]. Nous supposons que le régime permanent existe et est atteint.

(*) Manuscrit reçu en novembre 1977.

(1) Maître Assistant au C.N.A.M., Laboratoire de Recherche Opérationnelle.

Tout nouveau client, lors de son arrivée dans le système, trouve l'une des situations suivantes :

S_0: il n'y a aucune unité dans le système; le guichet est donc libre et le nouvel arrivant y entre immédiatement : son temps d'attente, noté $E(T_f \mid 0)$, est nul. La probabilité de trouver cette situation est q_0;

S_1: il y a un seul client dans le système, qui est donc au guichet. Notons $E(R)$ la durée moyenne du restant du service à lui donner. Si la loi du service est exponentielle, tout se passe comme si ce service venait de commencer lorsque survient le nouvel arrivant, et : $E(R) = 1/\mu$. Dans le cas général, on peut établir que : $E(R) = E(X^2)/2\,E(X) = (1/2)\,\mu\,E(X^2)$, où $E(X) = 1/\mu$ est la durée moyenne des services, et $E(X^2)$ le moment d'ordre deux de la densité des services. [C'est un résultat de la théorie du renouvellement ([1], t. 1, p. 169-174).] L'attente moyenne sera alors : $E(T_f \mid 1) = E(R)$. La probabilité de trouver cette situation est q_1;

S_2: il y a deux clients dans le système : l'un est au guichet et devra compléter son service, provoquant ainsi une attente de durée moyenne $E(R)$; l'autre est dans la file et subira un service complet, de durée moyenne $1/\mu$. Donc, l'attente moyenne sera : $E(T_f \mid 2) = E(R)+1/\mu$. La probabilité de trouver cette situation est q_2;

. . . ;

S_n: il y a n clients dans le système : un au guichet, d'où une attente moyenne $E(R)$, et (n-1) dans la file pour l'ensemble desquels la durée totale moyenne d'occupation du guichet sera : $(n-1)/\mu$.

Donc l'attente moyenne pour le nouvel arrivant sera:

$$E(T_f \mid n) = E(R) + \frac{n-1}{\mu}.$$

. . . .

Finalement, l'espérance mathématique $E(T_f)$ du temps d'attente s'obtient par application du théorème des probabilités totales:

$$\begin{aligned} E(T_f) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(T_f \mid n).q_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[E(R) + \frac{n-1}{\mu} \right].q_n \\ &= E(R)(1-q_0) + \frac{E(\nu_a)}{\mu}, \end{aligned}$$

où $E(\nu_a)$ représente la longueur moyenne de la file, mais observée uniquement lors des instants d'arrivées des clients. Notons que la relation ci-dessus est valable dans le cas G/G/1.

Particularisons la au cas M/G/1; alors $p_n = q_n$, d'où:

$$E(T_f) = E(R)(1-p_0) + \frac{E(\nu)}{\mu},$$

où:

$$E(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\, p_n$$

est la longueur moyenne de la file.

La formule de Little ([1], p. 15-17) relie $E(T_f)$ à $E(\nu)$:

$$E(\nu) = \lambda . E(T_f).$$

D'autre part, $1-p_0$ est la probabilité que le guichet soit actif; la loi de conservation des clients ([2], [6]), permet de trouver : $1-p_0 = \lambda/\mu$. En effet, le taux λ des arrivées dans le système doit être égal, en régime permanent, à celui des sorties puis qu'il n'y a ni génération spontanée ni disparition de clients dans le système!; ce dernier n'est autre que le produit du taux de service μ par la probabilité $1-p_0$ que le guichet serve.

En substituant $E(\nu)$, $(1-p_0)$ et $E(R)$ dans l'expression de $E(T_f)$, il vient:

$$E(T_f) = \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{2} \mu E(X^2) + \frac{\lambda}{\mu} E(T_f),$$

$$\boxed{E(T_f) = \frac{\lambda E(X^2)}{2(1-\lambda/\mu)}.}$$

C'est la formule de Pollaczek-Khintchine.

BIBLIOGRAPHIE

0. A. Y. Khintchine, *Mathematisches uber die Erwartung von einem offentlichen Schalter*, Math. Sbornik, vol. 39, 1932, p. 73-84 (en russe, résumé en allemand).
1. L. Kleinrock, *Queuing Systems*, 2 tomes, Wiley, 1976.
2. M. Krakowski, *Conservation Methods in Queuing Theory*, R.A.I.R.O., série verte, vol. V1, 1973, p. 63-83.
3. M. Krakowski, *Arrival and Departure Processes in Queues, Pollaczek-Khintchine Formula for Bulk Arrival and Bounded Systems*, R.A.I.R.O., série verte, vol. V1, 1974, p. 45-56.
4. B. Lemaire, *Méthode de conservation et blocage dans les files d'attente*, R.A.I.R.O., série verte, vol. V4, 1977, p. 363-377.
5. B. Lemaire, *Files d'attente : théorie et applications à la R.O.*, Cours polycopié du C.N.A.M., Laboratoire de R.O., 1976-1977.
6. B. Lemaire, *Théorème de conservation des clients*, note de recherche, Laboratoire de R.O., C.N.A.M., juillet 1977.
7. F. Pollaczek, *Uber eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie;* III, Math. Zeitschrift, tome 32, 1930, p. 64-100 et p. 729-750.