Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

Abdelkader Lahrichi

Coûts moyens de circuits hamiltoniens de de K_n

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 13, nº 2 (1979), p. 199-204.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1979__13_2_199_0>

© AFCET, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 13, n° 2, mai 1979, p. 199 à 204)

Brèves Communications

COÛTS MOYENS DE CIRCUITS HAMILTONIENS DE K_n (*)

par Abdelkader LAHRICHI [1]

Résumé. — *En transposant la notion de graphe réduit introduite par Lemaire* [3], *a un graphe complet valué orienté, on donne simplement les coûts moyens des circuits hamiltoniens empruntant un ensemble d'arcs A et évitant un ensemble d'arcs B.*

Abstract. — *In transposing the notion of "reduced graph" introduced by Lemaire* [3], *to a directed weighted and complete graph, we give easily the average costs of hamiltonien circuits passing by a set of arcs A and avoiding a set of arc B.*

Pour résoudre le problème du voyageur de commerce dans un graphe complet K_n valué et symétrique, Vo-Khac-Khoan [5] introduit la notion de coût moyen (coût régularisé) des cycles hamiltoniens. Dans [3], Lemaire calcule les coûts moyens des cycles hamiltoniens de K_n, empruntant une, deux, ou trois arêtes données et évitant une arête fixée.

Pour démontrer leurs résultats, ces auteurs utilisent des dénombrements combinatoires. En transposant la notion de graphe réduit, introduite par Lemaire [3], à un graphe complet valué orienté, on donne simplement les coûts moyens des circuits hamiltoniens empruntant un ensemble d'arcs A et évitant un ensemble d'arcs B.

I. COÛT MOYEN DES CIRCUITS HAMILTONIENS (c. h.) DE K_n

Soit K_n un graphe complet de n sommets, orienté, valué dans R. Le coût de l'arc (i, j) sera noté C_{ij}, avec $C_{ii}=0$ par convention.

On pose : $\Gamma=\sum_{i,j} C_{ij}$ (notation de Vo-Khac [5]).

Le nombre d'arcs de K_n, à l'exclusion des boucles, est égal à $n(n-1)$; on peut alors définir le coût moyen $\langle x \rangle$ d'un arc : $\langle x \rangle=\Gamma/n(n-1)$. Un c. h. emprunte n arcs de K_n. Les arcs jouent des rôles symétriques. Donc, on peut déduire que le coût moyen $\langle C \rangle$ des c. h. de K_n (espérance mathématique de la valeur d'un c. h. tiré au hasard) est égal à

$$n.\langle x \rangle=n.\frac{\Gamma}{n(n-1)}=\frac{\Gamma}{n-1},$$

(*) Reçu mai 1977.

[1] Institut de programmation, Université de Paris-VI.

© Bordas-Dunod

d'où

LEMME 1 : $\langle C \rangle = \Gamma/(n-1)$.

Par un calcul combinatoire dont l'extension à notre cas est immédiate, Lemaire [4] trouve le même résultat dans un graphe complet non orienté.

II. GRAPHE RÉDUIT DE K_n PAR RAPPORT A A

Soit A un ensemble de h arcs, formant k chemins élémentaires : ces chemins n'ayant aucun sommet en commun (*fig.* 1).

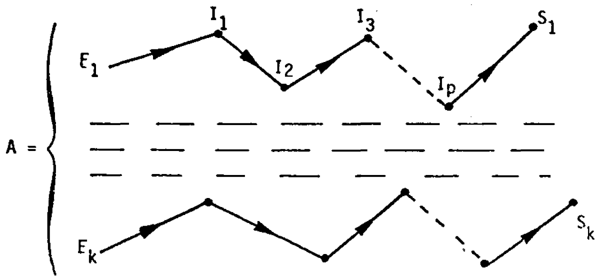

Figure 1

Notons :

$E = \{E_i\}$ = ensemble des « entrées » des chemins de A; card $E = k$.

$S = \{S_i\}$ = ensemble des « sorties » des chemins de A; card $S = k$.

$M = \{I_p\}$ = ensemble des sommets « intermédiaires » des chemins de A.

On montre aisément que : card $M = h - k$.

Contractons chacun des k chemins élémentaires $[E_j \ldots S_j]$ en un sommet fictif F_j. Illustrons cela par la figure 2 (K_7).

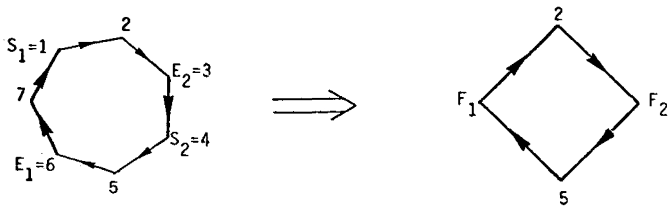

Figure 2

Un c. h. de K_7 contenant A. avec $A = \{67, 71, 34\}$

Le c. h. correspondant dans K_7 (A).

On obtient ainsi un graphe orienté $K(A)$, complet, de $n-h$ sommets. En effet, la contraction de chaque arc de A supprime un sommet. $K(A)$ sera appelé graphe réduit de K_n par rapport à A (*cf.* Lemaire [3]).

Il sera valué par des coûts $C'_{p,m}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} C'_{ij}=C_{ij} \quad \text{pour} \quad i\notin E \quad \text{et} \quad j\notin S. \\ \qquad C'_{i,F_j}=C_{i,E_j}. \\ \qquad C'_{F_j,k}=C_{S_j,k}. \end{cases}$$

Remarque : Le nombre de c. h. empruntant globalement les arcs de A dans K_n (N_A) est égal au nombre de c. h. de $K(A)$ d'où :

LEMME 2 : $N_A=(n-h-1)!$

III. COÛT MOYEN DES c. h. EMPRUNTANT A DANS K_n

Notons :

$\gamma(A)=$la somme des coûts des arcs formant A;

$\Gamma_A=\sum_{i,j} C_{ij}$ dans $K(A)$;

$\langle C\rangle_{K(A)}=$coût moyen des c. h. dans $K(A)$;

$\langle C_A\rangle=$coût moyen des c. h. empruntant A dans K_n.

THÉORÈME 1 :

$$\boxed{\langle C_A\rangle=\gamma(A)+\frac{\Gamma_A}{n-h-1}.}$$

Démonstration : Le coût de tout c. h. de K_n empruntant les h arcs de A, est égal à la somme $\gamma(A)$ des coûts des arcs de A d'une part, et du coût d'un c. h. du graphe réduit d'autre part. Comme les c. h. de K_n empruntant A sont en en bijection avec les c. h. de $K(A)$, on déduit :

$$\langle C_A\rangle=\gamma(A)+\langle C\rangle_{K(A)}.$$

Or d'après le lemme 1 : $\langle C\rangle_{K(A)}=\Gamma_A/(n-h-1)$ d'où le théorème 1.

Exemple : Calcul de $\langle C_{ij}\rangle$.

Notation : $\Gamma_i^+=\sum_{m=1}^{n} C_{im}$;$\Gamma_i^-=\sum_{j=1}^{n} C_{ji}$, $X=$ensemble des sommets de K_n.

Dans ce cas, A se réduit au seul arc (ij), $M=\varnothing$, $E=\{i\}$, $S=\{j\}$, $h=1$:

$$\Gamma_A=\sum_{r\in X-\{i\}}\ \sum_{s\in X-\{j\}} C_{rs}-C_{ji}=\Gamma-\Gamma_i^+-\Gamma_j^-+C_{ij}-C_{ji}.$$

d'où

$$\langle C_{ij}\rangle=C_{ij}+\frac{\Gamma-\Gamma_i^+-\Gamma_j^-+C_{ij}-C_{ji}}{n-2}.$$

Dans le cas d'un graphe non orienté $C_{ij}=C_{ji}$, d'où $\Gamma_i^+=\Gamma_i^-=\Gamma_i$. On retrouve alors la formule de Vo-Khac [5] :

$$\langle C_{ij}\rangle=C_{ij}+\frac{\Gamma-\Gamma_i-\Gamma_j}{n-2}.$$

IV. COÛT MOYEN DES c. h. EMPRUNTANT A (h ARCS) ET ÉVITANT AU MOINS UN ARC DE B

K_n est orienté

Soit B' (p arcs) l'ensemble des arcs de B « restant » dans $K(A)$.

Notons :

$\langle C_{\bar{B}'}\rangle_{K(A)}$ = coût moyen des c. h. de $K(A)$ évitant au moins un arc de B'.

$\langle C_{A\bar{B}}\rangle$ = coût moyen des c. h. de K passant par A et évitant au moins un arc de B.

On a aisément

$$\langle C_{A\bar{B}}\rangle=\langle C_{A\bar{B}'}\rangle=\gamma(A)+\langle C_{\bar{B}'}\rangle_{K(A)}.$$

Or les N_A c. h. de $K(A)$ sont constitués de $N_{AB'}$ c. h. passant par tous les arcs de B' et de $N_A-N_{AB'}$ c. h. évitant au moins un arc de B', d'où

$$N_A\langle C\rangle_{K(A)}=N_{AB'}\langle C_{B'}\rangle_{K(A)}+(N_A-N_{AB'})\langle C_{\bar{B}'}\rangle_{K(A)}.$$

On en déduit :

LEMME 3 :

$$\langle C_{A\bar{B}}\rangle=\gamma(A)+\frac{N_A\langle C\rangle_{K(A)}-N_{AB'}\langle C_{B'}\rangle_{K(A)}}{N_A-N_{AB'}}.$$

D'après (§ II) :

$$N_A=(n-h-1)\,!,\ N_{AB'}=(n-h-p-1)\,!,\qquad \langle C\rangle_{K(A)}=\frac{\Gamma_A}{n-h-1},$$

$$\langle C_{B'} \rangle_{K(A)} = \gamma(B') + \frac{\Gamma_{A \cup B'}}{n-h-p-1}.$$

En remplaçant dans le lemme 3, chaque terme par sa valeur, on aboutit à :

THÉORÈME 2 :

$$\boxed{\langle C_{A\bar{B}} \rangle = \gamma(A) + \frac{(n-h-2)!\,\Gamma_A - (n-h-p-2)!\,\Gamma_{A \cup B'} - (n-h-p-1)!\,\gamma(B')}{(n-h-1)! - (n-h-p-1)!}.}$$

Application

Calculons $\langle C_{\bar{i}\bar{j}} \rangle$ dans K_n (orienté). Dans ce cas : $A = \emptyset$, $\gamma(A) = 0$, $\Gamma_A = \Gamma$, $\Gamma_{A \cup B'} = \Gamma_{ij} = \Gamma - \Gamma_i^+ - \Gamma_j^- + C_{ij} - C_{ji}$, $h = 0$, $p = 1$, $\gamma(B') = C_{ij}$.

En remplaçant dans le théorème 2 chaque terme par sa valeur on trouve

$$\langle C_{\bar{i}\bar{j}} \rangle = \frac{(n-3)\Gamma + (\Gamma_i^+ + \Gamma_j^-) - (n-1)C_{ij} + C_{ji}}{(n-2)^2}.$$

K_n non orienté

Le raisonnement se fait comme pour le théorème 2. Soit a (resp. b) le nombre de sommets intermédiaires (degré 2) des chaines formées par les h (resp. p) arêtes de A (resp. B'). D'après le théorème 2 de Lemaire [3] : $N_A = (n-h-1)!\,2^{h-a-1}$, $N_{AB'} = (n-h-p-1)!\,2^{h+p-(a+b)-1}$.

En remplaçant dans le lemme 3 N_A, $N_{AB'}$, $\langle C \rangle_{K(A)}$, $\langle C_{B'} \rangle_{K(A)}$ par leurs valeurs, on trouve :

THÉORÈME 3 :

$$\boxed{\langle C_{A\bar{B}} \rangle = \gamma(A) + \frac{(n-h-2)!\,\Gamma_A - (n-h-p-2)!\,2^{p-b}\,\Gamma_{A \cup B'} - (n-h-p-1)!\,2^{p-b}\,\gamma(B')}{(n-h-1)! - (n-h-p-1)!\,2^{p-b}}.}$$

Application

Calculons $\langle C_{\bar{i}\bar{j}} \rangle$ dans K_n (non orienté). Dans ce cas, $A = \emptyset$, $\gamma(A) = 0$, $\Gamma_A = \Gamma$, $\Gamma_{A \cup B'} = \Gamma_{ij} = \Gamma - \Gamma_i - \Gamma_j$, $h = 0$, $p = 1$, $b = 1$.

En remplaçant dans le théorème 3, on retrouve :

$$\langle C_{\overline{ij}} \rangle = \frac{\Gamma\,(n-4)+2\,(\Gamma_i+\Gamma_j)-2\,C_{ij}\,(n-2)}{(n-2)\,(n-3)} \quad (cf.\ [4]).$$

REMERCIEMENTS

Nous remercions MM. B. Lemaire et M. Chein pour leurs critiques qui ont permis d'améliorer une version précédente de cette note.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. FREHEL, *Régularisation dans les problèmes combinatoires, problèmes de tournées, de partition et de recouvrement,* Métra, décembre, (75), vol XIV.
2. M. GONDRAN, *Deux transformations idéales pour régulariser les problèmes combinatoires,* Bull. Dir. Étud. Rech. E.D.F., série C, n° 2, 1978 (à paraître).
3. B. LEMAIRE, *Dénombrements des cycles hamiltoniens de K_n et $K_{n,n}$ empruntant ou évitant des arêtes données,* R.A.I.R.O., série verte, vol. 1, 1975, p. 101-111.
4. B. LEMAIRE, *Fondements, généralisation et critique de la notion d'affinité,* R.A.I.R.O. série verte, vol. 1, n° 10, octobre 1976, p. 43-57.
5. K. VO-KHAC, *La régularisation dans les problèmes combinatoires et son application au problème des tournées de livraison,* R.A.I.R.O., série verte, 3e année, n° V 1, 1969, p. 91-101.