

ELEONOR CIUREA

**Deux remarques sur le flot dynamique  
maximal de coût minimal**

*Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche  
opérationnelle. Recherche opérationnelle*, tome 13, n° 3 (1979),  
p. 303-306.

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1979\\_\\_13\\_3\\_303\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1979__13_3_303_0)

© AFCET, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## DEUX REMARQUES SUR LE FLOT DYNAMIQUE MAXIMAL DE COÛT MINIMAL (\*)

par ELEONOR CIUREA (1)

*Résumé.* — Ford et Fulkerson [2] ont montré que, lorsque les capacités des arcs se conservent dans le temps, on peut construire un flot dynamique maximal dans un réseau  $G$  en partant d'un flot statique de  $G$ . Ce flot dynamique est nommé flot répété dans le temps. Dans cet article on montre que contrairement au cas du flot dynamique maximal il n'existe pas nécessairement un flot dynamique maximal de coût minimal qui soit un flot répété. On y montre également que ce problème peut être résolu dans un réseau agrandi  $G_1(P)$  qui est toujours un sous-graphe partiel de  $G(P)$  (construit comme dans la référence [2]).

*Abstract.* — Ford and Fulkerson [2] have shown that, when arcs capacities are preserved in time, a flow is called temporally repeated flow. It is shown in this article that unlike in the case of maximal dynamic flow there does not necessarily exist a maximal dynamic flow of minimal cost which is a temporally repeated flow. It is also shown that this problem can be solved in a time expanded version  $G_1(P)$  which is always a subgraph of  $G(P)$  (constructed as in reference [2]).

### 1. LE PROBLÈME DU FLOT DYNAMIQUE MAXIMAL DE COÛT MINIMAL

Soit  $G=(N, A)$  un graphe connexe avec  $N$  l'ensemble des sommets et  $A$  l'ensemble des arcs. A chaque arc  $(x, y) \in A$  on attache les nombres entiers positifs  $h(x, y), c(x, y, t)$  qui représentent respectivement le temps de parcours et la capacité de l'arc à l'instant  $t$ , et les entiers nonnégatifs  $p(x, y, t)$  qui représente le coût de transport de l'arc dans l'unité de temps. On note par  $s$  la source et par  $d$  le puits du réseau.

Le problème du flot dynamique maximal de coût minimal peut être formulé de la manière suivante. Déterminer les flux  $f(x, y, t)$  qui doivent satisfaire :

$$\sum_{t=0}^P \sum_{y \in N} [f(s, y, t) - f(y, s, t - h(y, s))] = v(P), \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{y \in N} [f(x, y, t) - f(y, x, t - h(y, x))] &= 0, \\ (x \neq s, d; t = 0, 1, \dots, P), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(\*) Reçu mai 1976.

(1) Université de Braşov, Roumanie.

$$\sum_{t=0}^P \sum_{y \in N} [f(d, y; t) - f(y, d; t - h(y, d))] = -v(P) \quad (3)$$

$$0 \leq f(x, y; t) \leq c(x, y; t); \quad t=0, 1, \dots, P-h(x, y), \quad (4)$$

$$\max v(P) \quad (5)$$

$$\min \sum_{t=0}^P \sum_A p(x, y; t) \cdot f(x, y; t), \quad (6)$$

où  $P$  est le nombre de périodes de temps.

Le problème (1) à (5) a été résolu par Ford et Fulkerson [2] en montrant qu'un flot dynamique sur  $P$  périodes en traversant le réseau  $G$ , correspond à un flot statistique dans un réseau agrandi  $G(P) = (N(P), A(P))$  qui peut être construit de la manière suivante. Pour chaque sommet  $x \in N$  on définit  $(P+1)$  sommets  $x(t) \in N(P)$ ,  $t=0, 1, \dots, P$  et pour chaque arc on définit les arcs  $(x(t), y(t+h(x, y))) \in A(P)$ ,  $t=0, 1, \dots, P-h(x, y)$ . De plus on ajoute les arcs  $(x(t), x(t+1))$ ,  $t=0, 1, \dots, P-1$ . Les capacités de transports dans  $G(P)$  sont :

$$\left. \begin{aligned} c(x(t), y(t+h(x, y))) &= c(x, y; t), & t=0, 1, \dots, P-h(x, y), \\ c(x(t), x(t+1)) &= \infty, & t=0, 1, \dots, P-1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Toujours dans la référence [2] on montre que, lorsque, pour chaque arc  $(x, y) \in A$  :

$$c(x, y; t) = c(x, y), \quad t=0, 1, \dots, P-h(x, y), \quad (8)$$

le problème (1) à (5) peut être résolu en  $G$ , c'est-à-dire on peut construire un flot dynamique maximal, en répétant dans le temps un flot statique de la forme arcs-chemins de  $G$ . Le flot dynamique maximal ainsi obtenu est nommé flot répété dans le temps.

## 2. DEUX REMARQUES SUR LE PROBLÈME

La première remarque est que contrairement au cas du flot dynamique maximal il n'existe pas nécessairement un flot dynamique maximal de coût minimal qui soit un flot répété. Cela résulte de l'exemple suivant. Dans cet exemple on va considérer vérifiées les conditions (8) et

$$\left. \begin{aligned} p(x, y; t) &= p(x, y), & t=0, 1, \dots, P-h(x, y); & (x, y) \in A, \\ p(x(t), x(t+1)) &= 0, & t=0, 1, \dots, P-1; & x \in N. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Soit le graphe de la figure 1, où les trois nombres attachés à chaque arc correspondent respectivement à la capacité, au temps de parcours et au coût de transport de l'arc.

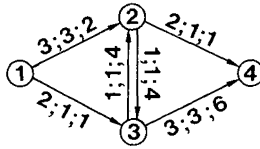


Figure 1

On se propose de trouver un flot dynamique maximal de coût minimal pour  $P=4$ . En construisant le graphe  $G(4)$  associé au graphe  $G$  de la figure 1 et en résolvant dans ce graphe agrandi le problème du flot statique maximal de coût minimal, on obtient la solution donnée dans le figure 2, où les nombres associés aux arcs tracés en gras représentent la valeur du flot de l'arc.

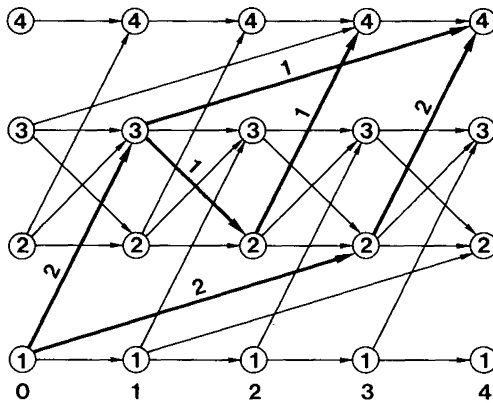


Figure 2

Puisque ce flot n'est pas un flot répété dans le temps et la solution étant unique, il résulte qu'un flot dynamique maximal de coût minimal n'est pas nécessairement un flot répété dans le temps.

La seconde remarque est que l'on peut limiter la recherche du flot dynamique maximal de coût minimal au sous-graphe partiel  $G_1(P)$  de  $G(P)$  engendré par les chemins de  $G$ , de la source au puits, dont le temps total de parcours est inférieur ou égal à  $P$ . Ainsi :

(i) soit  $T(s, x)$  la longueur du plus court chemin de  $s$  à  $x$  et  $T(x, d)$  la longueur du plus court chemin de  $x$  à  $d$ ;

(ii) si  $T(s, x) + T(x, d) > P$ , on élimine le sommet  $x$ ; soit  $N_1$  l'ensemble des sommets restants;

(iii) si  $T(s, x) + h(x, y) + T(y, d) > P$ , on élimine l'arc  $(x, y)$ ; soit  $A_1$  l'ensemble des arcs restants;

(iv) on construit alors le graphe  $G_1(P)$  de la façon suivante :

– pour  $x \in N_1$ , on définit  $q(x) = P + 1 - (T(s, x) + T(x, d))$  sommets :  $x(T(s, x) + t) \in N_1(P)$ ,  $t$  de 0 à  $q(x) - 1$  et  $q(x) - 1$  arcs :  $(x(T(s, x) + t), x(T(s, x) + t + 1))$ ,  $t$  de 0 à  $q(x) - 2$ ,

– pour  $(x, y) \in A_1$ , on définit  $a(x, y) = P + 1 - (T(s, x) + h(x, y) + T(y, d))$  arcs :  $(x(T(s, x) + t), y(T(s, x) + h(x, y) + t))$ ,  $t$  de 0 à  $a(x, y) - 1$ ,

– les capacités et les coûts de transport des arcs de  $G_1(P)$  sont les mêmes que ceux des arcs correspondant de  $G(P)$ .

La démonstration qu'il suffit de se restreindre à  $G_1(P)$  est évidente.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. C. BERGE, *Grappe et hypergraphe*, Dunod, Paris, 1970.
2. L. R. FORD et D. R. FULKERSON, *Flots dans les graphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.
3. T. C. HU, *Integer Programming and Network Flows*, Addison-Wesley, Publishing Company, 1969.