Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

J. Abadie

Une modification de la méthode GRG

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 13, nº 3 (1979), p. 323-326.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1979__13_3_323_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operation Research
(vol. 13, n° 3, août 1979, p. 323 à 326)

Brève Communication

UNE MODIFICATION DE LA MÉTHODE GRG (*)

par J. ABADIE [1]

Résumé. — *La méthode GRG est une méthode de résolution des problèmes de programmation non linéaire. On propose une modification destinée, dans le cas où les contraintes ne sont pas linéaires, à diminuer le nombre d'appels de contraintes et le temps d'exécution.*

Abstract. — *The GRG algorithm is a numerical method for the nonlinear programming problem. A modification is proposed in order to reduce the number of constraints calls and the CPU time when the constraints are not linear.*

Considérons un programme non linéaire sous la forme canonique

$$\min \varphi(X), \qquad f(X)=0, \qquad a \leqq X \leqq b, \tag{1}$$

où X, a, b sont des vecteurs-colonne de $\mathbf{R}^n$; où $a \leqq X \leqq b$ signifie $a_j \leqq X_j \leqq b_j$, $\forall j \in \mathscr{J}=\{1, \ldots, n\}$; où $f(X)=0$ signifie $f_i(X)=0$, $\forall i \in \mathscr{I}=\{1, \ldots, m\}$, les fonctions φ, f_i étant continûment différentiables. Nous supposons $a_j=-\infty$, $b_j=+\infty$, $\forall j \in \mathscr{J}$, sauf mention expresse du contraire.

$f(X)$ est considéré comme un vecteur-colonne de $\mathbf{R}^m$. Nous désignons les gradients de φ, f_i en X par $\varphi'(X)$, $f_i'(X)$, qui sont des vecteurs-ligne de $\mathbf{R}_n$. La notation $f'(X)$ désigne le jacobien en X des fonctions $f_i(X)$, $i \in \mathscr{I}$; l'élément en ligne i et colonne j est $\partial f_i / \partial X_j$. Nous supposerons toujours que le rang du jacobien est égal au nombre m de ses lignes. On peut alors en extraire une sous-matrice inversible d'ordre m composée de m colonnes $j \in \mathscr{B}$. Nous appelons $\mathscr{N}$ le complémentaire de $\mathscr{B}$ par rapport à $\mathscr{J}$. Le vecteur X se décompose de façon naturelle en $x=(X_j)_{j \in \mathscr{N}}$ et $y=(X_j)$, $j \in \mathscr{B}$, qui sont des vecteurs-colonne d'espaces $\mathbf{R}^{n-m}$ et $\mathbf{R}^m$. Le jacobien est partitionné en $\partial f / \partial x$ et $\partial f / \partial y$.

Soit X^0 un point *faisable*, c'est-à-dire vérifiant $f(X^0)=0$, $a \leqq X^0 \leqq b$. Posons

$$A=f'(X^0)=(N, B)=\left(\frac{\partial f}{\partial x^0}, \frac{\partial f}{\partial y^0}\right), \tag{2}$$

(*) Reçu février 1979.
[1] Electricité de France et Université Paris-Dauphine.

$$c=\varphi'(X^0)=(c^{\mathcal{N}}, c^{\mathcal{B}})=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}, \frac{\partial\varphi}{\partial y^0}\right). \tag{3}$$

L'équation $f(x, y)=0$ détermine $y(x)$ comme fonction continûment différentiable de x dans un voisinage de X^0. Posons

$$\varphi(x)=\varphi(x, y(x)), \qquad g=\varphi'(x^0), \tag{4}$$

où $g\in\mathbf{R}_{n-m}$. Estimant les multiplicateurs de Lagrange par

$$u=-c^{\mathcal{B}}B^{-1}, \tag{5}$$

où $u\in\mathbf{R}_m$, on a

$$g=c^{\mathcal{N}}+uN. \tag{6}$$

L'itération courante de la méthode GRG peut alors s'exposer comme suit, en désignant par ε_f, ε_g deux constantes positives :

pas 0 : *on connaît* X^0 *faisable;*

pas 1 : *calculer* A, c *par* (2), (3);

pas 2 : *extraire de* A *la sous-matrice inversible* B *d'ordre* m, *et calculer* B^{-1};

pas 3 : *calculer* u *et* g *par* (5), (6); *si* $\|f(X^0)\|\leqq\varepsilon_f$ *et* $\|g\|\leqq\varepsilon_g$, *FIN*;

pas 4 : *calculer* $h\in\mathbf{R}^{n-m}$ *tel que le produit scalaire* gh *soit négatif;*

pas 5 : *déterminer* $k\in\mathbf{R}^m$ *tel que* $k=-B^{-1}(Nh)$;

pas 6 : *soit* $\theta>0$; *calculer* $\tilde{X}^1$, *décomposé en* x^1, $\tilde{y}^1$ *définis par*

$$x^1=x^0+\theta h,\ \tilde{y}^1=y^0+\theta k; \tag{7}$$

pas 7 : *connaissant* $\tilde{X}^1$, *calculer* X^1, *décomposé en* x^1, y^1, *en résolvant par rapport à* y^1 *le système* $f(x^1, y^1)=0$, *ce qui se fait par la méthode itérative*

$$\tilde{y}^{k+1}=\tilde{y}^k-B^{-1}f(x^1, \tilde{y}^k), \qquad k=1, 2, \ldots; \tag{8}$$

si cette méthode diverge ou converge trop lentement, on diminue θ *et on reprend au pas* 6; *il y a convergence si* $\|f(x^1, \tilde{y}^k)\|\leqq\varepsilon_f$, *auquel cas on pose* $y^1=\tilde{y}^k$;

pas 8 : *calculer* $\varphi(x^1, y^1)$; *si* $\varphi(x^1, y^1)>\varphi(x^0, y^0)$, *diminuer* θ *et reprendre au pas* 6; *sinon, on peut affiner la valeur de* θ, *en utilisant les pas* 6, 7 *autant de fois que nécessaire;*

pas 9 : X^1 *remplace* X^0 *pour l'itération suivante.*

Lorsqu'un X_j^0 est à une borne a_j ou b_j, l'algorithme ci-dessus doit être modifié pour éviter si possible que j appartienne à la base $\mathcal{B}$. Cela peut amener en particulier, durant le pas 7, à effectuer des *changements de base*. Si $j\in\mathcal{N}$, il faut, au pas 3, remplacer g_j par 0 si $X_j=a_j$ et $g_j>0$, ou si $X_j=b_j$ et $g_j<0$.

Parmi les facteurs importants pour la rapidité de l'algorithme, on distingue plus particulièrement :

1. le choix de la tolérance ε_f;
2. le choix de la base $\mathscr{B}$ (pas 2);
3. le choix de h (pas 4);
4. le choix du premier θ (pas 6).

Ces choix sont discutés, ainsi que bien d'autres points, dans nos références.

Dans notre propre code GRG, θ est tout d'abord astreint à $0 \leqq \theta \leqq \theta_1$, où θ_1 résulte des itérations antérieures, et aussi de $a \leqq \tilde{X}^1 \leqq b$; ensuite on cherche, *au pas* 6, une valeur de θ telle que

$$\varphi(\tilde{X}^1) < \varphi(X^0). \tag{9}$$

Nous proposons ici de changer (9) en

$$\varphi(\tilde{X}^2) < \varphi(X^0), \tag{10}$$

où $\tilde{X}^2$ résulte d'*une* application *unique, au pas* 6, de la méthode pseudo-newtonienne (8), avec la restriction supplémentaire qu'aucun changement de base n'est autorisé. Ayant ainsi modifié le pas 6, on appliquera, au pas 7, la formule (8) pour $k=2, 3, \ldots$

Nous attendons ainsi, grâce à une diminution sensible du nombre des appels de $f(X)$, une certaine amélioration des temps de calcul lorsque les contraintes $f(X)=0$ ne sont pas linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

J. Abadie, *Optimization Problems with Coupled Blocks*, Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, Bucharest, 1970, n° 4, p. 5-26.

J. Abadie, *Application of the GRG Algorithm to Optimal Control Problems*, chap. 8, in *Integer and Nonlinear Programming*, J. Abadie, éd., North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1970.

J. Abadie, *The GRG Method for Non linear Programming*, p. 335-362, in H. J. Greenberg, éd., référence citée ci-dessous, 1978.

J. Abadie et M. Bichara, *Résolution de certains problèmes de commande optimale*, R.A.I.R.O., série verte, vol. 2, mai 1973, p. 77-105.

J. Abadie et J. Carpentier, *Généralisation de la méthode du gradient réduit de Wolfe au cas de contraintes non linéaires*, Note HR 6678, Électricité de France, Paris, octobre 1965.

J. Abadie et J. Carpentier, *Generalization of the Wolfe Reduced Gradient Method to the Case of Nonlinear Constraints*, in *Optimization*, R. Fletcher, éd., Academic Press, London and New York, 1969, p. 37-47.

J. ABADIE et A. HAGGAG, *Performances du gradient réduit généralisé avec une méthode quasi newtonienne pour la programmation non linéaire,* R.A.I.R.O., série verte, vol. 13, mai 1979, p. 209-216.

A. DRUD, *Methods for Control of Complex Dynamic Systems,* I.M.S.O.R. Publication, No. 27, The Institute of Mathematical Statistics and Operations Research, The Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark, 1976.

D. GABAY et D. LUENBERGER, *Efficiently Converging Minimization Methods Based on the Reduced Gradient,* S.I.A.M. Journal on Control and Optimization, vol. 14, 1976, p. 42-61.

G. A. GABRIELLE et K. M. RAGSDELL, *The Generalized Reduced Gradient Method: A reliable Tool for Optimal Design,* A.S.M.A. Publication 75-DET-103, juin 1965.

H. J. GREENBERG, éd., *Design and Implementation of optimization software,* Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Holland, 1978.

D. R. HELTNE, *Technical Appendices to GRG* 73, The University of Iowa, Iowa City, septembre 1973.

A. JAIN, *The Solution of Nonlinear Programs using the Generalized Reduced Gradient Method,* Technical Report SOL 76-6, Systems Optimization Laboratory, Department of Operations Research, Stanford University, mars 1976.

L. S. LASDON et A. D. WAREN, *Generalized Reduced Gradient Software for Linearly and Nonlinearly Constrained Problems,* p. 363-396, in H. J. GRENBERG, éd., référence citée ci-dessus, 1978.

Y. SMEERS, *The Generalized Reduced Gradient as an Extension of Feasible Direction Methods,* J. Optimization Theory and Applic., 22, 1977, p. 209-226.