ALAIN GUENOCHE

Énumération de classes de permutations

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 13, nº 4 (1979), p. 379-390.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1979__13_4_379_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 13, n° 4, novembre 1979, p. 379 à 390)

ÉNUMÉRATION DE CLASSES DE PERMUTATIONS (*)

par Alain GUENOCHE [1]

Résumé. — *Dans cet article nous proposons une méthode qui permet de construire un élément d'un ensemble combinatoire dont le rang pour l'ordre lexicographique sur cet ensemble, est donné. Nous appliquons cet algorithme à plusieurs classes de permutations, dont les permutations à nombre de rencontres fixé et aux permutations dont le nombre et les longueurs des cycles sont fixés. On résout ainsi le problème du tirage au hasard dans ces ensembles.*

Abstract. — *The aim of this note is to provide an algorithm for ranking combinatorial sets. We apply it to some permutation classes, permutations with a given number of "rencontres", permutations with given lengths of cycles. Random generation in these sets is thus solved.*

Dans cet article nous proposons une méthode d'énumération par le rang d'ensembles de permutations satisfaisant à diverses contraintes. Nous entendons par énumération par le rang d'un ensemble $\mathscr{K}$ de configurations combinatoires, la définition d'une bijection entre cet ensemble et $[K]=\{1, 2, \ldots \operatorname{card}(\mathscr{K})\}$ qui permette de construire la configuration de rang donné, pour l'ordre lexicographique sur $\mathscr{K}$.

Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs, $\mathbb{N}^*$ le monoïde libre sur $\mathbb{N}$ c'est-à-dire l'ensemble des mots de longueur finie sur l'alphabet $\mathbb{N}$. On notera $[n]=\{1, 2, \ldots, n\}$. Soit $\mathscr{K}$ un ensemble quelconque de configurations (permutations, partages, ...) et soit x un élément de $\mathscr{K}$; on le représente dans $\mathbb{N}^*$ par un mot de longueur h à l'aide d'un codage Γ :

$$\Gamma : \mathscr{K} \to \mathbb{N}^*, \qquad \Gamma(x)=x_1 x_2 \ldots x_h$$

[pour certaines configurations (partages) la longueur du code h est fonction de x, pour d'autres (permutations) elle ne dépend que de $\mathscr{K}$].

(*) Reçu octobre 1978.

[1] Centre National de la Recherche Scientifique, Laboratoire d'Informatique pour les Sciences de l'Homme.

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0842/1979/379/$ 4.00

On identifie $\mathscr{K}$ et $\Gamma(\mathscr{K})$, et l'on muni $\mathscr{K}$ d'une relation d'ordre total $\underset{\mathscr{K}}{\prec}$ (généralement d'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^*$). Cet ordre réalise une bijection entre $\mathscr{K}$ et $[K]=\{1, 2, \ldots, K=\operatorname{card}(\mathscr{K})\}$. On apporte aussi une solution à la construction d'éléments aléatoires uniformément distribués dans $\mathscr{K}$. Il suffit de tirer un rang R au hasard entre 1 et K et de construire l'élément de rang R.

Dans un premier temps nous proposons un schéma d'énumération par le rang, cadre général d'une classe d'algorithmes qui réalisent ces bijections, puis nous l'appliquons aux problèmes de l'énumération des permutations à nombre de rencontres fixé, des permutations de type fixé (nombre et longueurs des cycles fixés), des permutations d'ordre fixé, des permutations telles que l'élément i ne puissent occuper que les rangs $i-1$, i, ou $i+1$.

Les cardinaux de ces ensembles sont bien connus, on les trouvera dans tous les ouvrages classiques de combinatoire (par exemple [1, 8]), mais leur énumération n'a pas encore été abordée. Les méthodes d'énumération d'ensembles combinatoires ont d'abord eu pour but de produire la liste exhaustive des permutations de n éléments (on peut citer [2, 5 et 6]) et maintenant on assiste au développement de méthodes d'énumération par le rang qui s'appliquent également aux partages d'un entier, aux partitions d'un ensemble, [9, 10], aux tableaux standards [4] ou autres configurations classiques [7]. On s'est aussi intéressé de façon récente au tirage au hasard dans ces ensembles [3, 7].

Les applications proposées de notre schéma d'énumération par le rang complètent les classes de configurations étudiées.

1. SCHÉMA D'ÉNUMÉRATION PAR LE RANG

L'objet de ce schéma d'énumération par le rang est de construire l'élément $x^R=x_1^R x_2^R \ldots x_h^R$ de rang R pour l'ordre noté $\underset{\mathscr{K}}{\prec}$ sur $\mathscr{K}$. Cet élément est défini par

$$R=\operatorname{card}\{x\in\mathscr{K} \mid x \underset{\mathscr{K}}{\prec} x^R\}.$$

On construit x^R terme à terme dans $\Gamma(\mathscr{K})$ en déterminant successivement x_1^R, $x_2^R, \ldots, x_h^R$, en h étapes.

Notons $A_1, A_2, \ldots, A_h$ les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ définis par

$$A_i=\left\{ x_i\in\mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, x\in\mathscr{K}, \qquad x=x_1\, x_2 \ldots x_i \ldots x_h, \\ x_1, x_2, \ldots x_{i-1} \text{ étant les } i-1 \text{ premiers termes,} \end{array} \right.$$

A_i est l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}$ qui peuvent être le i-ième terme d'un élément x de $\mathscr{K}$, sachant que $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ en sont les $i-1$ premiers termes, c'est-à-dire un début de code permis, puisqu'il existe au moins un élément de $\mathscr{K}$ ayant ce début de code; les éléments de A_i sont ordonnés suivant l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$.

On écrira :

$$A_i = \{ a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots \}.$$

Soit $\mathscr{K}(x_1 x_2 \ldots x_j)$ le sous-ensemble de $\mathscr{K}$ dont les j premiers termes sont respectivement $x_1, x_2, \ldots, x_j$, et soit $K(x_1 x_2 \ldots x_j)$ son cardinal.

A la $j+1$-ième étape du schéma, $x_1^R, x_2^R, \ldots, x_j^R$ sont connus, et l'on cherche à déterminer x_{j+1}^R. C'est un élément de A_{j+1}, par définition de cet ensemble.

Notons R_{j+1} le rang de x^R dans $\mathscr{K}(x_1^R x_2^R \ldots x_j^R)$; on pose $R_1 = R$, et R_{j+1} est défini par la relation de récurrence :

$$R_{j+1} = R_j - \sum_{\substack{i \in A_j \\ i < x_j^R}} K(x_1^R \ldots x_{j-1}^R i).$$

Si l'on pose à chaque étape

$$R' = \sum_{\substack{i \in A_j \\ i < x_j^R}} K(x_1^R \ldots x_{j-1}^R i),$$

on a $R_{j+1} = R_j - R'$.

Alors x_{j+1}^R est le t-ième élément de A_{j+1} qui satisfait à la double inégalité

$$\sum_{i=1}^{t-1} K(x_1^R \ldots x_j^R a_{j+1,i}) < R_{j+1} \leqq \sum_{i=1}^{t} K(x_1^R \ldots x_j^R a_{j+1,i}).$$

Pour appliquer ce schéma d'énumération qui réalise la bijection annoncée entre $\mathscr{K}$ et $[K]$, il suffit à chaque étape de savoir calculer A_j et $K(x_1 x_2 \ldots x_j)$.

On remarque que l'on a ramené le problème de l'énumération de $\mathscr{K}$, à celui du dénombrement des ensembles $\mathscr{K}(x_1 \ldots x_j)$.

2. PERMUTATIONS A NOMBRE DE RENCONTRES FIXÉ

Soit s une permutation des n éléments $\{1, 2, \ldots, n\}$. On notera $s_i = s(i)$ et $s = (s_1 s_2 \ldots s_n)$.

On dit qu'une permutation s présente une rencontre en i si et seulement si $s_i = i$.

On notera $\mathscr{C}_{n,m}$ l'ensemble des permutations de degré n avec m rencontres et $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des permutations de degré n sans rencontre. Rappelons les valeurs de C_n et $C_{n,m}$ cardinaux respectifs de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n,m}$, puis énumérons ces deux ensembles dans l'ordre lexicographique.

$$C_n=(n-1)(C_{n-1}+C_{n-2})=nC_{n-1}+(-1)^n,$$

$$C_{n,m}=\binom{n}{m}C_{n-m}.$$

2.1. Permutations sans rencontre

Considérons l'ensemble des permutations sans rencontre dont les j premiers termes sont $s_1, s_2, \ldots, s_j$; il reste à placer $n-j$ termes aux rangs $j+1, j+2, \ldots, n$, c'est-à-dire à réaliser une application injective et sans rencontre, de $[n]-\{s_1, s_2, \ldots, s_j\}$ dans $\{j+1, \ldots, n\}$. Posons :

— $p=n-j$;

— $r=\operatorname{card}\{\{[n]-\{s_1, s_2, \ldots, s_j\}\}\cap\{j+1, j+2, \ldots, n\}\}$. Le nombre de rangs où l'on peut réaliser une rencontre est r.

PROPOSITION 2.1 : *Le nombre de permutations sans rencontre de degré n dont les j premiers termes sont $s_1, s_2, \ldots, s_j$ et défini par la relation*

$$C_n(s_1 \ldots s_j)=f(p, r),$$

avec

$$f(p, r)=\left\{\begin{array}{c} p! \quad si \quad r=0, \\ C_p \quad si \quad r=p, \\ C_r(p-r)!+\sum_{i=1}^{\min(r, p-r)}\binom{r}{i}\binom{p-r}{i}i!f(p-i, r-i) \\ si \quad 0<r<p \end{array}\right\} \tag{1}$$

Démonstration : Il s'agit de placer p nombres à p rangs en évitant les r rencontres possibles :

— si $r=0$, on peut placer tous les nombres dans l'importe quel ordre possible;

— si $r=p$, les ensembles des nombres et des rangs coïncident, on doit réaliser une permutation sans rencontre de p termes;

— si $0<r<p$, établissons une formule de sommation.

Choisissons i rangs parmi les r susceptibles de provoquer une rencontre et plaçons à ces rangs des nombres qui ne peuvent en provoquer (on en choisit i parmi $p-r$) :

— si $i=0$ on a une permutation sans rencontre des r termes communs et une application quelconque des $p-r$ autres termes, soit $C_r(p-r)!$ possibilités;

— si $i\neq 0$, puisqu'il n'y a pas de rencontre possible, toutes les applications sont permises, on a $\binom{r}{i}\binom{p-r}{i}i\,!$ combinaisons, que l'on complète par une application sans rencontre de $p-i$ nombres sur autant de rangs, avec $r-i$ rencontres possibles, soit $f(p-i,\ r-i)$, et au total, $\binom{r}{i}\binom{p-r}{i}i\,!\,f(p-i,\ r-i)$ possibilités.

L'indice de sommation i peut rendre toute valeur inférieure à r et $p-r$; ceci établit la formule (1), qui permet de tabuler les valeurs de f, que l'on trouve pour p et r variants de 1 à 6 dans le tableau suivant :

r .... p	0	1	2	3	4	5	6
1............	1	0					
2............	2	1	1				
3............	6	4	3	2			
4............	24	18	14	11	9		
5............	120	96	150	112	53	44	
6............	720	600	1 080	1 712	1 250	385	265

Pour appliquer le schéma d'énumération, il suffit de préciser :

$$A_{j+1}=[n]-\{s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_j\}-\{j+1\} \qquad \text{et} \qquad A_1=[n]-\{1\}.$$

EXEMPLE 1 : *Écrivons la* 200-*ième permutation sans rencontre de degré* 6 :

$$n=6; \qquad R=200.$$

$$R_1=200,\quad A_1=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\},\quad C_6(2)=f(5,\ 4)=53,\quad R'=53,$$
$$C_6(3)=53,\quad R'=106,$$
$$C_6(4)=53,\quad R'=159,$$
$$C_6(5)=53,\quad s_1^R=5;$$
$$R_2=41,\quad A_2=\{1,\ 3,\ 4,\ 6\},\quad C_6(5,\ 1)=f(4,\ 3)=11,\quad R'=11,$$
$$C_6(5,\ 3)=f(4,\ 2)=14,\quad R'=25,$$
$$C_6(5,\ 4)=f(4,\ 2)=14,\quad R'=39,$$
$$C_6(5,\ 6)=f(4,\ 2)=14,\quad s_2^R=6;$$
$$R_3=2,\quad A_3=\{1,\ 2,\ 4\},\quad C_6(5,\ 6,\ 1)=f(3,\ 1)=4,\quad s_3^R=1;$$
$$R_4=2,\quad A_4=\{2,\ 3\},\quad C_6(5,\ 6,\ 1,\ 2)=f(2,\ 0)=2,\quad s_4^R=2;$$
$$R_5=2,\quad A_5=\{3,\ 4\},\quad C_6(5,\ 6,\ 1,\ 2,\ 3)=f(2,\ 0)=2\,R'=1,$$
$$C_6(5,\ 6,\ 1,\ 2,\ 4)=1,\quad s_5^R=4;$$
$$R_6=1,\quad A_6=\{3\},\quad C_6(5,\ 6,\ 1,\ 2,\ 4,\ 3)=1,\quad s_6^R=3.$$

La 200-*ième permutation sans rencontre de* 6 *éléments est* (5, 6, 1, 2, 4, 3).

2.2. Permutations à m rencontres

On peut songer à ordonner $\mathscr{C}_{n,m}$ en plaçant d'abord les m rencontres puis en énumérant les éléments de $\mathscr{C}_{n-m}$ comme précédemment. Mais l'ordre ainsi réalisé n'est pas l'ordre lexicographique. Pour obtenir une énumération de $\mathscr{C}_{n,m}$ suivant cet ordre, considérons les applications de $[n]-\{s_1, \ldots, s_j\}$ dans $\{j+1, j+2, \ldots, n\}$ qui présentent q rencontres. On a comme dans le paragraphe précédent $n-j$ nombres à placer aux rangs $j+1, \ldots, n$, sachant que l'on veut réaliser q rencontres parmi les r rangs où ces rencontres peuvent se produire. Posons :

- $p=n-j$;
- $r=\text{card}\,\{\{[n]-\{s_1, \ldots, s_j\}\} \cap \{j+1, \ldots, n\}\}$.

Soit q le nombre de rencontres qui restent à réaliser.

PROPOSITION 2.2 : *Le nombre de permutations de degré n qui présentent m rencontres, et commencent par $s_1 s_2 \ldots s_j$ est donné par la relation*

$$C_{n,m}(s_1, \ldots, s_j)=\binom{r}{q} f(p-q, r-q).$$

En effet, parmi les r rencontres possibles, on en choisi q, et il reste alors à placer $p-q$ nombres en évitant $r-q$ rencontres.

On complètera f par

$$f(0, 0)=1, \qquad f(0, r)=0, \qquad f(p, r)=0 \quad \text{si } r<0.$$

Les éléments que l'on peut placer au $j+1$-ième rang sont donnés par

$$A_1=[n],$$

$$A_{j+1}=\begin{cases} [n]-\{s_1, s_2, \ldots, s_j\} & \text{si} \quad q>0, \\ [n]-\{s_1, \ldots, s_j\}-\{j+1\} & \text{si} \quad q=0. \end{cases}$$

EXEMPLE 2 : $n=6$, $m=2$, $R=110$:

$$R_1=110, \quad A_1=[6], \quad C_{6,2}(1)=\binom{5}{1} f(4, 4)=45, \quad R'=45,$$

$$C_{6,2}(2)=\binom{4}{2} f(3, 2)=18, \quad R'=63,$$

$$C_{6,2}(3)=18, \quad R'=81,$$

$$C_{6,2}(4)=18, \quad R'=99,$$

$$C_{6,2}(5)=18, \quad s_1^R=5;$$

$$R_2=11,\quad A_2=[6]-\{5\}\; C_{6,2}(5,1)=\binom{3}{2}f(2,1)=3,\quad R'=3,$$

$$C_{6,2}(5,2)=\binom{3}{1}f(3,2)=9,\quad s_2^R=2;$$

$$R_3=8,\quad A_3=[6]-\{5,2\}\; C_{6,2}(5,2,1)=\binom{2}{1}f(2,1)=2,\quad R'=2,$$

$$C_{6,2}(5,2,3)=f(3,2)=3,\quad R'=5,$$

$$C_{6,2}(5,2,4)=\binom{1}{1}f(2,0)=2,\quad R'=7,$$

$$C_{6,2}(5,2,6)=\binom{1}{1}f(2,0)=2,\quad s_3^R=6;$$

$$R_4=1,\quad A_4=\{1,3,4\},\quad C_{6,2}(5,2,6,1)=\binom{0}{1}f(1,-1)=0,\quad R'=0,$$

$$C_{6,2}(5,2,6,3)=0,\quad R'=0,$$

$$C_{6,2}(5,2,6,4)=\binom{0}{0}f(2,0)=2,\quad s_4^R=4;$$

$$R_5=1,\quad A_5=\{1,3\},\quad C_{6,2}(5,2,6,4,1)=1,\quad s_5^R=1;$$
$$R_6=1,\quad A_6=\{3\},\quad C_{6,2}(5,2,6,4,1,3)=1,\quad s_6^R=1.$$

La 110-*ième permutation de* 6 *éléments avec* 2 *rencontres est* (5, 2, 6, 4, 1, 3).

3. PERMUTATIONS DE TYPE FIXÉ

Soit A un partage de l'entier n qui présente l_1 parts égales à a_1, l_2 parts égales à $a_2, \ldots, l_p$ parts égales à a_p, $a_1, \ldots, a_p$ étant des entiers tous distincts, indicés dans l'ordre croissant. On notera

$$A=[(l_1)a_1, (l_2)a_2, \ldots, (l_p)a_p].$$

Le nombre total de parts, m est

$$m=\sum_{i=1}^{p} l_i, \qquad \text{et l'on a} \quad n=\sum_{i=1}^{p} l_i a_i.$$

On dit qu'une permutation s_A de degré n est de type A (A étant un partage de n comme précédemment), si s_A présente pour i variant de 1 à p, l_i cycles de longueur a_i.

Si s_A désigne la bijection de $[n]$ sur $[n]$ correspondant à la permutation s_A, les éléments d'un même cycle $(s_{i,1}, \ldots, s_{i,k})$ ainsi noté vérifient :

$$s_A(s_{i,j}) = s_{i,j+1}, \qquad \forall j, \quad 1 \leqq j < k,$$

et

$$s_A(s_{i,k}) = s_{i,1}.$$

Dans ce paragraphe on adoptera le codage

$$s_A = (s_{1,1}, \ldots, s_{1,a_1})(s_{2,1}, \ldots) \ldots (s_{m,1}, \ldots, s_{m,a_m}),$$

où entre parenthèses figurent les éléments d'un même cycle. Ces cycles sont rangés suivant l'ordre non décroissant de leurs longueurs, chaque cycle commençant par son plus petit élément, les cycles de même longueur étant rangés dans l'ordre croissant de leur premier élément.

EXEMPLE 3 : *La permutation de type* $[(2)\,2, (1)\,3]$ *notée classiquement* $(5, 4, 6, 2, 7, 3, 1)$ *s'écrit dans ce codage* $(2, 4)(3, 6)(1, 5, 7)$.

Soit $\mathscr{S}_A$ l'ensemble des permutations de type A, son cardinal S_A est donné par la formule de Cauchy :

$$S_A = \frac{n\,!}{\prod_{i=1}^{p} a_i^{l_i}\, l_i\,!}.$$

Appelons « bloc » d'une permutation s_A l'ensemble des cycles de même longueur; A étant défini comme précédemment, s_A a p blocs. Pour construire l'élément s_A^R dans $\mathscr{S}_A$, il suffit de déterminer son premier bloc, c'est-à-dire les l_1 premiers cycles de a_1 termes. En effet si les $l_1\, a_1$ premiers termes sont connus, pour construire s_A^R, il reste à définir la permutation de degré $n - l_1\, a_1$, de type $[(l_2)\, a_2, \ldots, (l_p)\, a_p]$ et de rang $R_{l_1 a_1 + 1}$, conformément aux notations du schéma.

Nous allons donc dénombrer l'ensemble des permutations de type A dont les j premiers termes sont $s_1, s_2, \ldots, s_j$, avec

$$j \leqq l_1\, a_1.$$

Remarquons tout d'abord qu'en vertu des règles d'écriture, le l-ième cycle de longueur a_1 commence par son plus petit terme, et que ce terme est certainement supérieur au premier terme du cycle précédent, de même longueur :

$$\forall\, l = 1, 2, \ldots, l_1, \quad s_{(l-1)a_1+1} = s_{l,1} < s_{l,k}, \qquad \forall\, k = 2, \ldots, a_1,$$

$$\forall\, l = 2, \ldots, l_1, \quad s_{l-1,1} < s_{l,1}.$$

Soit :

— l le numéro du cycle de longueur a_1 dans lequel se place le j-ième terme

$$(l-1)\, a_1 < j \leqq l a_1 \leqq l_1\, a_1;$$

— r le rang du j-ième terme dans ce l-ième cycle

$$r=j-(l-1)a_1.$$

— l' le nombre de cycles de longueur a_1 qui sont entièrement à déterminer

$$l'=l_1-l.$$

Pour achever la construction d'une permutation de type A, dont les premiers termes sont $s_1, s_2, \ldots, s_j$, il faut successivement déterminer :

— le l-ième cycle, en choisissant a_1-r termes parmi les t termes non classés supérieurs à $s_{(l+1)a_1+1}$, premier terme du l-ième cycle

$$t=\text{card}\{k\in[n]-\{s_1, s_2, \ldots, s_j\}/k>s_{(l-1)a_1+1}\}.$$

Tout ordre sur ces a_1-r termes définit un cycle particulier; il y a donc $\binom{t}{a_1-r}(a_1-r)!$ possibilités;

— l' cycles de longueur a_1, soit $l'a_1$ termes à choisir parmi $t-a_1+r$ possibilités, chaque choix composant $(l'a_1)!/a_1^{l'}l'!$ familles différentes de l' cycles; il y a donc $\binom{t-a_1+r}{l'a_1}(l'a_1)!/a_1^{l'}l'!$ possibilités;

— la permutation des $n-l_1a_1$ termes ne figurant pas dans les l_1 premiers cycles; elle est de type $[(l_2)a_2, \ldots, (l_p)a_p]$; d'après la formule de Cauchy, il y a $(n-l_1a_1)!\Big/\prod_{i=2}^{p} a_i^{l_i}l_i!$ possibilités.

On a finalement :

Proposition 3 : *Le nombre de permutations de type* $A=[l_1(a_1), \ldots, l_p(a_p)]$ *dont les* j $(j<l_1a_1)$ *premiers éléments sont* $s_1, s_2, \ldots, s_j$ *est défini par la relation*

$$S_A(s_1, \ldots, s_j)=\binom{t}{a_1-r}(a_1-r)!\binom{t-a_1+r}{l'a_1}\frac{(l'a_1)!}{a_1^{l'}l'!}\,\frac{(n-l_1a_1)!}{\prod_{i=2}^{p}a_i^{l_i}l_i!}.$$

A chaque étape j :

$$A_{j+1}=\{k\in[n]-\{s_1, \ldots, s_j\}\text{ tels que }k>s_{(l-1)a_1+1}\}.$$

Ce sont les éléments que l'on peut placer dans le l-ième cycle. Initialement

$$A_1=[n-l_1a_1+1],$$

puisque $s_{1,1}$ est certainement inférieur à tous les autres termes du premier bloc.

EXEMPLE 4 : $n=7$, $A=[(2)2, (1)3]$, $R=152$:

$$j=1, \quad R_1=152, \quad A_1=[4], \quad a_{1,1}=1, \quad l=1, \quad r=1, \quad l'=1,$$

$$t=6, \quad S_A(1)=\binom{6}{1}\binom{5}{2}2=120, \quad R'=120,$$

$$a_{2,1}=2,$$

$$t=5, \quad S_A(2)=\binom{5}{1}\binom{4}{2}2=60, \quad s_1^R=2;$$

$$j=2, \quad R_2=32, \quad A_2=\{3, 4, 5, 6, 7\}, \quad a_{2,1}=3, \quad l=1, \quad r=2, \quad l'=1,$$

$$t=4, \quad S_A(2, 3)=\binom{4}{2}2=12, \quad R'=12,$$

$$a_{2,2}=4,$$

$$t=4, \quad S_A(2, 4)=12, \quad R'=24,$$

$$a_{2,3}=5,$$

$$t=4, \quad S_A(2, 5)=12, \quad s_2^R=5;$$

$$j=3, \quad R_3=8, \quad A_3=\{3, 4, 6, 7\}, \quad a_{3,1}=3, \quad l=2, \quad r=1, \quad l'=0,$$

$$t=3, \quad S_A(2, 5, 3)=\binom{3}{1}2=6, \quad R'=6,$$

$$a_{3,2}=4,$$

$$t=2, \quad S_A(2, 5, 4)=\binom{2}{1}2=4, \quad s_3^R=4;$$

$$j=4, \quad R_4=2, \quad A_4=\{6, 7\}, \quad a_{4,1}=6, \quad l=2, \quad r=2, \quad l'=0,$$

$$t=1, \quad S_A(2, 5, 4, 6)=2, \quad s_4^R=6.$$

La 152-*ième permutation de* [7] *de type* [(2) 2, (1) 3] *commence par* (2, 5) (4, 6). *Il reste à placer* $\{1, 3, 7\}$ *dans un cycle de longueur* 3; $R_5=2$; *il s'agit donc de déterminer la deuxième permutation de* [3] *et de type* [(1) 3], *c'est-à-dire* (1, 3, 2), *qui après renumérotation donne le cycle* (1, 7, 3). *Finalement*

$$s_{[(2)2, (1)3]}^{152}=(2, 5)(4, 6)(1, 7, 3).$$

Application aux permutations d'ordre donné.

Ce résultat s'applique à l'énumération des permutations d'ordre donné. On dit qu'une permutation s de degré n est d'ordre p si p est le plus petit entier tel que s^p soit l'élément neutre du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.

Soit $\mathscr{S}_n^p$ l'ensemble des permutations de degré n et d'ordre p, S_n^p son cardinal. L'ordre d'une permutation est lié à son type par le lemme suivant :

LEMME : *L'ordre d'une permutation est égal au plus petit commun multiple des longueurs de ses cycles.*

Pour énumérer par le rang $\mathscr{S}_n^p$ il suffit donc de construire tous les partages A de n, tels que le p.p.c.m. de leurs parts soit égal à p; soit $A^1, A^2, \ldots, A^k$ ces partages.

On obtient l'élément de rang R dans $\mathscr{S}_n^p$ en appliquant le schéma d'énumération par le rang avec la relation

$$S_n^p(s_1 s_2 \ldots s_j)=\sum_{i=1}^{k} S_{A^i}(s_1 s_2 \ldots s_j).$$

L'ensemble des éléments qui peuvent occuper la $j+1$-ième place est la réunion, pour tous les partages de n dont le p.p.c.m. des parts est égal à p, des éléments qui peuvent occuper la $j+1$-ième place.

4. PERMUTATION A DÉPLACEMENTS BORNÉS

Considérons l'ensemble $\mathscr{D}_n$ des permutations de degré n telles que le i-ième élément ne puisse occuper que les rangs $i-1$, i, $i+1$.

On adopte ici le même codage des permutations qu'au paragraphe 2 :

$$s=(s_1, \ldots, s_n)\in\mathscr{D}_n \Leftrightarrow s_i=\begin{cases}\{1, 2\} & \text{si } i=1,\\ \{i-1, i, i+1\} & \text{si } 1<i<n,\\ \{n-1, n\} & \text{si } i=n.\end{cases}$$

On connaît le résultat classique : D_n le cardinal de $\mathscr{D}_n$ est le nombre de Fibonacci d'ordre $n+1$, F_{n+1}, défini par la relation de récurrence

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1} \qquad \text{avec} \quad F_1=F_2=1.$$

On détermine l'élément de $\mathscr{D}_n$ de rang R, à l'aide du schéma d'énumération par le rang en appliquant les relations évidentes :

$$-D_n(s_1 \ldots s_j)=\begin{cases}F_{n-j+1} & \text{si } s_1 \ldots s_j \text{ est une permutation de degré } j,\\ F_{n-j} & \text{sinon;}\end{cases}$$

$$-A_1=\{1, 2\} \qquad \text{et} \qquad A_{j+1}=\{j, j+1, j+2\}-\{s_j^R\}.$$

EXEMPLE 5 : $n=8$, $R=20$:

$$R_1=20, \quad A_1=\{1, 2\}, \quad D_8(1)=21, \quad s_1^R=1;$$

$$R_2=20, \quad A_2=\{2, 3\}, \quad D_8(1, 2)=13, \quad R'=13,$$

$$D_8(1, 3)=8, \quad s_2^R=3;$$

$$R_3=7, \quad A_3=\{2, 4\}, \quad D_8(1, 3, 2)=8, \quad s_3^R=2;$$

$$R_4=7, \quad A_4=\{4, 5\}, \quad D_8(1, 3, 2, 4)=5, \quad R'=5,$$

$$D_8(1, 3, 2, 5)=3, \quad s_4^R=5;$$

$$R_5=2, \quad A_5=\{4, 6\}, \quad D_8(1, 3, 2, 5, 4)=2, \quad s_5^R=4;$$

$$R_6=2, \quad A_6=\{6, 7\}, \quad D_8(1, 3, 2, 5, 4, 6)=2, \quad s_6^R=6;$$

$$R_7=2, \quad A_7=\{7, 8\}, \quad D_8(1, 3, 2, 5, 4, 6, 7)=1, \quad R'=1,$$

$$D_8(1, 3, 2, 5, 4, 6, 8)=1, \quad s_7^R=8;$$

$$R_8=1, \quad A_8=\{7\}, \quad D_8(1, 3, 2, 5, 4, 6, 8, 7)=1, \quad s_8^R=7.$$

La permutation cherchée est donc (1, 3, 2, 5, 4, 6, 8, 7).

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Berge, *Principes de combinatoire*, Dunod, Paris, 1968.
2. G. Ehrlich, *Loopless Algorithms for Generating Permutations and other Combinatorial Configurations*, Journal of A.C.M., vol. 20, n° 3, 1973.
3. W. Fernandez de La Vega et A. Guenoche, *Génération des partitions aléatoires uniformément distribuées*, Actes du Colloque A.F.C.E.T.-S.M.F. Palaiseau, 1978, p. 285, 291.
4. A. Guenoche, *Énumération des tableaux standards*, Discrete Math., vol. 25, 1979, p. 1-11.
5. F. M. Ives, *Permutation Enumeration: Four New Permutation Algorithms*, Communication A.C.M., vol. 19, n° 2, 1976, p. 68-72.
6. S. M. Johnson, *Generation of Permutation by Adjacent Transpositions*, Math. Comp., vol. 17, 1963.
7. A. Nijenmuis et H. S. Wilf, *Combinatorial Algorithms*, Academic Press, 1975.
8. J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, J. Wiley, 1958.
9. H. S. Wilf, *An Unified Setting for Sequencing, Ranking, and Selection Algorithms for Combinatorial Objects*, Advances in Math., vol. 24, 1977, p. 281-291.
10. S. G. Williamson, *On the Ordering, Ranking and Random Generation of Basic Combinatorial Sets*, Lecture Notes in Math., n° 579, 1977.