REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

J.-P. INDJEHAGOPIAN

Estimation récursive des paramètres d'un modèle de régression, variant au cours du temps

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 15, nº 1 (1981), p. 39-49.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1981__15_1_39_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 15, n° 1, février 1981, p. 39 à 49).

ESTIMATION RÉCURSIVE DES PARAMÈTRES D'UN MODÈLE DE RÉGRESSION, VARIANT AU COURS DU TEMPS (*) (**)

par J.-P. INDJEHAGOPIAN [1]

Résumé. — *Dans cet article, on utilise le filtre récursif de Kalman pour estimer les paramètres d'un modèle de régression quand ces paramètres varient au cours du temps suivant des processus stochastiques linéaires non stationnaires. On démontre que tout processus vectoriel non stationnaire ARIMA décrivant l'évolution du vecteur des paramètres d'un modèle de régression linéaire peut être représenté sous forme de vecteur d'état d'un système linéaire (discret) dynamique stochastique. Enfin, on applique le filtre de Kalman à des cas particuliers de processus d'évolution du vecteur des paramètres, tel que processus markovien AR(1), promenade aléatoire, processus stationnaire ARMA(1.1) et on discute brièvement du problème des réalisations markoviennes d'un processus gaussien stationnaire.*

Mots clés : Filtre de Kalman, processus vectoriel ARIMA, régression.

Abstract. — *In this paper we discuss the recursive estimation of parameters of linear regression models in which the parameters are time varying according to a nonstationary multivariate Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) models. The procedure uses Kalman filtering techniques. In the first part of this paper, we show how the parameter estimation problem can be brought into the state variable representation of dynamic and stochastic systems, and then we apply the Kalman filtering methodology in the cases where parameters are constant or changing over time. We consider in the second part of the paper particulars parameters models such as random walk, multivariate AR(1), multivariate ARIMA (1.0.1) and we discuss briefly the problem of markovian realization.*

Keywords: Kalman filter, vector ARIMA model, regression.

1. INTRODUCTION

Depuis quelques années, les économistes ont observé que les modèles économétriques habituels pour lesquels on postule l'hypothèse de stabilité des coefficients au cours du temps, se révélaient inadéquats pour décrire et/ou prévoir certains phénomènes économiques. Les raisons de ces instabilités structurelles n'ont pas été, jusqu'à présent, bien explorées. Une première raison d'instabilité des modèles économétriques tient sans doute au fait que ces modèles sont souvent incorrectement spécifiés. Cependant, il n'est pas nécessaire d'invoquer notre ignorance pour justifier la variation dans le temps de certaines

(*) Reçu novembre 1979,
(**) Cet article est une version révisée d'une communication faite au Tenth International Symposium on Mathematical Programming, Montréal, August, 1979.
([1]) E.S.S.E.C., Cergy-Pontoise, France.

structures économétriques. Par exemple, dans le domaine de l'économétrie des données individuelles temporelles (appelées quelquefois « panels ») des recherches montrent que l'hypothèse de stabilité des coefficients d'un modèle de régression est souvent intenable (*cf.* Rosenberg [31, 32], Harvey [18]). De même, on conçoit très bien que des théories économiques modélisées aujourd'hui soient inaptes à faire des prévisions à long terme, précisément, parce que ces modèles supposent une structure stable qui ne peut donc pas intégrer des événements exogènes tels que des changements de technologies par exemple (*cf.* Cooley et Prescott [8]).

Si des tests statistiques ont été proposés pour diagnostiquer une variation structurelle significative des coefficients d'un modèle de régression linéaire (*cf.* Chow [7], et plus récemment Brown, Durbin et Evans [6]), par contre, il n'existe pas de recherches proposant une méthodologie pour capturer les variations structurelles. Young [36, 37] Duncan et Horn [9], Rosenberg [31, 32], Sarris [35], Cooley et Prescott [8], Garbade [13], Harvey [18] ont abordé le problème de la variation des coefficients d'un modèle de régression. Dans ces recherches, le vecteur des paramètres d'une régression était supposé suivre soit une promenade aléatoire, soit un processus markovien d'ordre 1.

Dans cet article, nous allons aborder le problème de l'estimation récursive du vecteur des paramètres d'un modèle de régression qui évolue au cours du temps suivant un processus stochastique vectoriel non stationnaire ARIMA.

Cet article comporte trois parties. La première partie présente les principales caractéristiques du filtre de Kalman. La partie suivante propose un théorème permettant de représenter le modèle ARIMA d'évolution du vecteur des paramètres d'une régression, sous la forme d'un système linéaire dynamique stochastique. Cette représentation permet alors d'utiliser le filtre de Kalman pour estimer le vecteur paramètre. Enfin la troisième partie étudie des cas particuliers de processus d'évolution du vecteur des paramètres.

2. DESCRIPTION DU FILTRE DE KALMAN

On considère un système dont l'état, repéré par le vecteur d'état $\mathbf{x}_t$, évolue en temps discret suivant un processus markovien $X = \{ \mathbf{x}_t,\ t=0,\ 1,\ \ldots \}$ à valeurs dans R^m. Le modèle d'évolution du vecteur d'état $\mathbf{x}_t$ est :

$$\mathbf{x}_{t+1} = F_{t+1 \mid t}\,\mathbf{x}_t + G_t\,\mathbf{w}_{t+1}, \tag{2.1}$$

où $F_{t+1 \mid t}$ est une matrice $m \times m$ de transition, G_t une matrice $m \times p$ et $W = \{ \mathbf{w}_t,\ t=1, 2, \ldots \}$ un processus bruit blanc gaussien à valeurs dans R^p tel que $E(\mathbf{w}_t\,\mathbf{w}'_s) = Q_t\,\delta_t^s$.

[L'accent désigne la transposition et δ le symbole de Kronecker.]

Le vecteur d'état $\mathbf{x}_t$ n'est mesurable qu'à travers le r-vecteur observation $\mathbf{y}_t$, suivant la relation linéaire perturbée par un bruit aléatoire :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, \tag{2.2}$$

où H_t est une $r \times m$ matrice et $V = \{\mathbf{v}_t,\ t = 1, 2, \ldots\}$ un processus bruit blanc gaussien à valeurs dans R^r tel que $E(\mathbf{v}_t \mathbf{v}_s') = R_t \delta_t^s$.

Dans la suite, on supposera que les processus gaussiens $\mathbf{w}_t$ et $\mathbf{v}_s$ sont indépendants pour toutes valeurs de t et s et que les matrices de variances covariances Q_t et R_t sont définies positives.

Le problème du filtrage ou de la prédiction consiste à trouver un estimateur « optimal » de l'état $\mathbf{x}_t$ en utilisant la suite des observations disponibles $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s\} = Y^s$ où $s \leqq t$. Cet estimateur optimal noté $\hat{\mathbf{x}}_{t|s}$ n'est autre que l'espérance conditionnelle de $\mathbf{x}_t$ par rapport à Y^s (*cf.* Kalman [22], Bensoussan [3, 4], Jazwinsky [21], Mac Gregor [25]).

Le filtre récursif de Kalman permet de calculer $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}$ à partir de $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$ et $\mathbf{y}_{t+1}$. Le fonctionnement de cet algorithme nécessite la connaissance d'une part des matrices F, G, H et des matrices de variances covariances Q et R et d'autre part des conditions initiales $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ et $P_{0|0}$ qui représentent respectivement l'espérance et la matrice de variance du vecteur d'état $\mathbf{x}_0$.

3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UN MODÈLE DE RÉGRESSION VARIANT AU COURS DU TEMPS ET PRÉVISION

3.1. Estimation

Le filtre de Kalman peut être utilisé pour estimer le vecteur des paramètres d'un modèle de régression variant suivant un processus vectoriel ARIMA (p, d, q) :

$$\Psi_p(B)(1-B)^d \boldsymbol{\beta}_{t+1} = \Theta_q(B)\,\mathbf{a}_{t+1}, \tag{3.1}$$

$$y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}_t + \varepsilon_t, \tag{3.2}$$

où :

$\mathbf{x}_t$ désigne le k-vecteur des valeurs des k variables exogènes à l'époque t (l'une de ces variables peut être la constante 1).

$\{\varepsilon_t\}$ est un processus gaussien bruit blanc non autocorrélé i. e., $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = \sigma_\varepsilon^2 \delta_t^s$.

avec :

$$\Psi_p(B)(1-B)^d = I - \varphi_1 B - \ldots - \varphi_{p+d} B^{p+d},$$

$$\Theta_q(B) = I - \Theta_1 B - \ldots - \Theta_q B^q,$$

où :

B est l'opérateur de décalage $B\,\boldsymbol{\beta}_t=\boldsymbol{\beta}_{t-1}$, $B^m\,\boldsymbol{\beta}_t=\boldsymbol{\beta}_{t-m}\,(m>0)$, $\varphi_j\,(1\leqq j\leqq p+d)$ et $\Theta_l\,(1\leqq l\leqq q)$ sont des matrices $k\times k$ connues et I la matrice $k\times k$ identité.

$\{\mathbf{a}_t\}$ est un processus gaussien bruit blanc à valeur dans R^k.

La matrice de variance covariance $E\,(\mathbf{a}_t\mathbf{a}_s')=\delta_t^s Q_a$ et la variance σ_ε^2 sont supposées connues et les processus $\{\mathbf{a}_t\}$ et $\{\varepsilon_s\}$ non corrélés pour tout t et s.

On suppose, en outre, que les racines de det $\Psi_p\,(z)=0$ et les racines de det $\Theta_q(z)=0$ sont extérieures au disque unité et que ces deux polynômes n'ont pas de racines en commun.

Les processus vectoriels ARIMA présentés ci-dessus sont une extension des processus ARIMA univariés développés par Box et Jenkins [5]. Ces processus vectoriels sont décrits dans Granger et Newbolt [16], Hannan [17], Jenkins [20], Indjehagopian [19]. Montfort [29], Nerlove [30], Wallis [36], Zellner et Palm [39].

L'utilisation du filtre de Kalman, pour estimer de façon récursive le vecteur des paramètres $\boldsymbol{\beta}_t$, nécessite préalablement de représenter le système d'équations (3.1) et (3.2) sous la forme d'un système linéaire dynamique stochastique du type (2.1) et (2.2), d'où le théorème :

THÉORÈME : *Le système d'équations* (3.1) *et* (3.2) *est équivalent au système linéaire dynamique* (3.3) *et* (3.4) *ou* (3.3′) *et* (3.4′) *ci-dessous :*

si $p+d>q$:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{t+1}^1 \\ \boldsymbol{\beta}_{t+1}^2 \\ \vdots \\ \\ \boldsymbol{\beta}_{t+1}^{p+d-1} \\ \boldsymbol{\beta}_{t+1}^{p+d} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \varphi_1 & \\ \varphi_2 & I_{k(p+d-1)} \\ \vdots & \\ \varphi_{p+d-1} & \\ \hline \varphi_{p+d} & O_k^{k(p+d-1)} \end{array}\right] \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_t^1 \\ \boldsymbol{\beta}_t^2 \\ \vdots \\ \\ \boldsymbol{\beta}_t^{p+d-1} \\ \boldsymbol{\beta}_t^{p+d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_k \\ -\Theta_1 \\ \vdots \\ -\Theta_q \\ O_k \\ \vdots \\ O_k \end{bmatrix} \mathbf{a}_{t+1}, \quad (3.3)$$

$$y_t=[\mathbf{x}_t'\,\mathbf{O}_k'\,\ldots\,\mathbf{O}_k'] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_t^1 \\ \boldsymbol{\beta}_t^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_t^{p+d} \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \quad (3.4)$$

où :

$I_{k(p+d-1)}$ *est la* $[k(p+d-1)\times k(p+d-1)]$ *matrice identité.*

$O_k^{k(p+d-1)}$ *(resp.* O_k*) est la* $[k\times k\,(p+d-1)]$ *(resp.* $k\times k$*) matrice nulle.*

$\mathbf{O}'_k$ *est le vecteur nul* $1\times k$.

si $p+d\leqq q$ *:*

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}^1_{t+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}^{p+d}_{t+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}^{q+1}_{t+1}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}\varphi_1 & \\ \varphi_2 & \\ \vdots & \\ \varphi_{p+d} & I_{kq}\\ O_k & \\ \vdots & \\ \hline O_k & O_k^{kq}\end{array}\right]\times\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}^1_t\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}^{p+d}_t\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}^{q+1}_t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}I_k\\ -\Theta_1\\ \vdots\\ \\ -\Theta_q\end{bmatrix}\mathbf{a}_{t+1}, \qquad (3.3')$$

$$y_t=[\mathbf{x}'_t\,\mathbf{O}'_k\,\ldots\,\mathbf{O}'_k]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}^1_t\\ \boldsymbol{\beta}^2_t\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}^{q+1}_t\end{bmatrix}+\varepsilon_t. \qquad (3.4')$$

Preuve : Prenons le cas $p+d>q$ (la démonstration serait identique pour $p+d\leqq q$). L'équation matricielle (3.3) est équivalente au système :

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^1_{t+1}&=\varphi_1\,\boldsymbol{\beta}^1_t+\boldsymbol{\beta}^2_t+\mathbf{a}_{t+1},\\ \boldsymbol{\beta}^2_{t+1}&=\varphi_2\,\boldsymbol{\beta}^1_t+\boldsymbol{\beta}^3_t-\Theta_1\,\mathbf{a}_{t+1},\\ &\vdots\\ \boldsymbol{\beta}^{p+d}_{t+1}&=\varphi_{p+d}\,\boldsymbol{\beta}^1_t.\end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

A partir de la seconde équation de (3.5) en décalant le temps nous obtenons :

$$\boldsymbol{\beta}^2_t=\varphi_2\,\boldsymbol{\beta}^1_{t-1}+\boldsymbol{\beta}^3_{t-1}-\Theta_1\,\mathbf{a}_t.$$

En reportant l'expression de $\boldsymbol{\beta}^2_t$ dans l'équation (1) de (3.5) on obtient :

$$\boldsymbol{\beta}^1_{t+1}=\varphi_1\,\boldsymbol{\beta}^1_t+\varphi_2\,\boldsymbol{\beta}^1_{t-1}+\boldsymbol{\beta}^3_t+\mathbf{a}_{t+1}-\Theta_1\,\mathbf{a}_t.$$

De la même manière on peut calculer $\boldsymbol{\beta}_{t-1}^{3}$ à partir de la 3e équation de (3.5), etc. et par $(p+d-1)$ substitutions, on a la relation :

$$\boldsymbol{\beta}_{t+1}^{1}=\varphi_1\boldsymbol{\beta}_t^1+\ldots+\varphi_{p+d}\boldsymbol{\beta}_{t-(p+d-1)}^{1}+\mathbf{a}_{t+1}-\Theta_1\mathbf{a}_t-\ldots-\Theta_q\mathbf{a}_{t+1-q}$$

qui représente l'équation (3.1) d'évolution du vecteur $\boldsymbol{\beta}$ des paramètres. ■

Les matrices F, G, H sont ainsi parfaitement identifiées et il est possible d'utiliser le filtre de Kalman pour estimer de façon récursive le vecteur d'état $\mathbf{b}_t$ défini par $(\boldsymbol{\beta}_t^1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_t^{p+d})'$ ou $(\boldsymbol{\beta}_t^1, \ldots, \boldsymbol{\beta}^{q+1})'$ suivant que $p+d$ est plus grand ou plus petit que q.

3.2. Prévision avec le modèle de régression

Puisque l'estimateur optimal, au temps n, du futur état est donné par l'espérance conditionnelle du futur état par rapport à Y^n, il est facile de montrer que le prédicteur de l'état $\mathbf{b}_{n+l}$ pour l'horizon prévisionnel l est donné par :

$$\hat{\mathbf{b}}_{n+l|n}=F^l\hat{\mathbf{b}}_{n|n} \tag{3.6}$$

[on a posé $\mathbf{b}_n=(\boldsymbol{\beta}_n^1 \ldots \boldsymbol{\beta}_n^{p+d})'$ ou $(\boldsymbol{\beta}_n^1 \ldots \boldsymbol{\beta}_n^{q+1})'$ suivant que $p+d>q$ ou $p+d\leqq q$].

De plus, on peut démontrer que le prédicteur de la matrice de covariance du vecteur d'état à l'époque future $n+l$ satisfait à la relation :

$$P_{n+l|n}=F^lP_{n|n}F^{l'}+F^{l-1}Q_aF^{l-1'}+\ldots+FQ_aF'+Q_a. \tag{3.7}$$

La relation (3.4) ou (3.4') entre le vecteur observation et le vecteur d'état étant linéaire, il s'ensuit que le prédicteur de y_{n+l} et le prédicteur de la matrice de covariance du vecteur observation à l'époque future $n+l$, s'obtiennent respectivement par :

$$\hat{y}_{n+l|n}=H\hat{\mathbf{b}}_{n+l|n}, \tag{3.8}$$

$$S_{n+l|n}=HP_{n+l|n}H'+\sigma_\varepsilon^2 I. \tag{3.9}$$

Dans le cas de la régression linéaire ($H=[\mathbf{x}_t', \mathbf{o}_k', \ldots, \mathbf{o}_k']$) les relations (3.8) et (3.9) deviennent :

$$\hat{y}_{n+l|n}=\mathbf{x}_{n+l}'\hat{\boldsymbol{\beta}}_{n+l|n}, \tag{3.10}$$

$$S_{n+l|n}=\mathbf{x}_{n+l}'P_{n+l|n}^k\mathbf{x}_{n+l}+\sigma_\varepsilon^2, \tag{3.11}$$

où $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{n+l|n}$ est la première composante du vecteur $F^l\hat{\mathbf{b}}_{n|n}$, $\mathbf{x}_{n+l}$ le vecteur des valeurs connues des k variables exogènes à l'époque $n+l$ et $P_{n+l|n}^k$ le bloc des k premières lignes et colonnes de la matrice de covariance $P_{n+l|n}$.

4. ÉTUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS DE PROCESSUS D'ÉVOLUTION DU VECTEUR PARAMÈTRES

1° Le vecteur $\boldsymbol{\beta}_t$ varie suivant un processus markovien AR(1) :

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{t+1} &= \varphi\,\boldsymbol{\beta}_t + \mathbf{a}_{t+1}, \\ y_t &= \mathbf{x}_t'.\boldsymbol{\beta}_t + \varepsilon_t. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

L'utilisation du filtre récursif de Kalman conduit aux relations :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_t = \varphi\,\hat{\boldsymbol{\beta}}_{t-1} + [\varphi P_{t-1}\varphi' + Q_a] \times \mathbf{x}_t[\mathbf{x}_t'(\varphi P_{t-1}\varphi' + Q_a)\mathbf{x}_t + \sigma_\varepsilon^2]^{-1}(y_t - \mathbf{x}_t'\varphi\,\hat{\boldsymbol{\beta}}_{t-1}), \tag{4.2}$$

$$P_t = [\varphi P_{t-1}\varphi' + Q_a] \times [I - \mathbf{x}_t\{\mathbf{x}_t'(\varphi P_{t-1}\varphi' + Q_a)\mathbf{x}_t' + \sigma_\varepsilon^2\}^{-1}]\mathbf{x}_t'[\varphi P_{t-1}\varphi' + Q_a], \tag{4.3}$$

avec les notations simplifiées :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_t = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{t|t}, \qquad P_t = P_{t|t}.$$

Ce cas particulier a été analysé dans la littérature statistique par Duncan et Horn [9], Rosenberg [31, 32], Cooley et Prescott [8] et dans la littérature du contrôle et des systèmes dynamiques stochastiques par Young [36, 37], MacGregor [25], Sarris [35].

2° Le vecteur $\boldsymbol{\beta}_t$ évolue suivant une promenade aléatoire :

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{t+1} &= \boldsymbol{\beta}_t + \mathbf{a}_{t+1}, \\ y_t &= \mathbf{x}_t'\,\boldsymbol{\beta}_t + \varepsilon_t. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

En faisant $\varphi = I$ dans les relations (4.2) et (4.3) on obtient :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_t = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{t-1} + [P_{t-1} + Q_a]\mathbf{x}_t[\mathbf{x}_t'(P_{t-1} + Q_a)\mathbf{x}_t + \sigma_\varepsilon^2]^{-1}(y_t - \mathbf{x}_t'\hat{\boldsymbol{\beta}}_{t-1}) \tag{4.5}$$

et :

$$P_t = [P_{t-1} + Q_a][I - \mathbf{x}_t\{\mathbf{x}_t'(P_{t-1} + Q_a)\mathbf{x}_t + \sigma_\varepsilon^2\}^{-1}]\mathbf{x}_t'[P_{t-1} + Q_a]. \tag{4.6}$$

Ce cas particulier a été étudié plus précisément par Garbade [12]. Box et Jenkins ont analysé ce modèle dans le cas scalaire ($k=1$) avec $x_t'=1$ pour tout t.

3° Le vecteur $\boldsymbol{\beta}_t$ est constant au cours du temps. En faisant $\varphi = I$ et $Q_a = 0$ dans les relations (4.2) et (4.3) on obtient :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_t = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{t-1} + P_{t-1}\mathbf{x}_t[\mathbf{x}_t' P_{t-1}\mathbf{x}_t + \sigma_\varepsilon^2]^{-1}(y_t - \mathbf{x}_t'\hat{\boldsymbol{\beta}}_{t-1}) \tag{4.7}$$

et :

$$P_t = P_{t-1} - P_{t-1}\mathbf{x}_t[\mathbf{x}_t' P_{t-1}\mathbf{x}_t + \sigma_\varepsilon^2]^{-1}\mathbf{x}_t' P_{t-1}. \tag{4.8}$$

4° Le vecteur $\boldsymbol{\beta}_t$ est supposé suivre un modèle ARIMA (1, 0, 1) :

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{t+1}-\varphi\,\boldsymbol{\beta}_t&=\mathbf{a}_{t+1}-\Theta\,\mathbf{a}_t, \\ y_t&=\mathbf{x}_t'\,\boldsymbol{\beta}_t+\varepsilon_t. \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

A partir du théorème énoncé dans la partie 3, le système (4.9) est équivalent à (4.10) et (4.11) :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{t+1}^1 \\ \boldsymbol{\beta}_{t+1}^2 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} \varphi & I \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_t^1 \\ \boldsymbol{\beta}_t^2 \end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c} I \\ \hline -\Theta \end{array}\right]\mathbf{a}_{t+1}, \tag{4.10}$$

$$y_t=[\mathbf{x}_t' \mid \mathbf{O}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_t^1 \\ \boldsymbol{\beta}_t^2 \end{bmatrix}+\varepsilon_t. \tag{4.11}$$

Le système d'équation (4.10) et (4.11) s'écrit sous forme simplifiée :

$$\mathbf{b}_{t+1}=F\,\mathbf{b}_t+G\,\mathbf{a}_{t+1}, \tag{4.10'}$$

$$y_t=H\,\mathbf{b}_t+\varepsilon_t. \tag{4.11'}$$

Lorsque l'on connaît les paramètres φ, Θ et les statistiques Q_a et σ_ε^2 le filtre (optimal) de Kalman donne les relations :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_t=F\,\hat{\mathbf{b}}_{t-1}&+(FP_{t-1}F'+GQ_aG')H' \\ &\times[H(FP_{t-1}F'+GQ_aG')H'+\sigma_\varepsilon^2]^{-1}(y_t-HF\,\hat{\mathbf{b}}_{t-1}), \end{aligned} \tag{4.12}$$

et :

$$\begin{aligned} P_t=\{I&-(FP_{t-1}F'+GQ_aG')H' \\ &\times[H(FP_{t-1}F'+GQ_aG')H'+\sigma_\varepsilon^2]^{-1}\}(FP_{t-1}F'+GQ_aG'). \end{aligned} \tag{4.13}$$

5. CONCLUSION

Dans cet article nous avons démontré qu'il était possible de représenter sous forme d'un système linéaire (discret) dynamique stochastique un modèle de régression linéaire dont le vecteur des coefficients varie au cours du temps suivant un processus vectoriel non stationnaire ARIMA. Cette méthode de représentation sous forme de variable d'état pourrait d'ailleurs s'appliquer à des modèles plus généraux tels que les modèles autorégressifs et/ou à retards échelonnés, les modèles économétriques à équations multiples, dans lesquels les coefficients varient au cours du temps.

Nous avons ensuite utilisé le filtre de Kalman sur des cas particuliers de modèles d'évolution du vecteur des paramètres tels qu'un processus markovien

AR(1), une promenade aléatoire et un processus stationnaire autorégressif moyenne mobile d'ordre (1,1). A partir de l'estimateur optimal de Kalman, nous avons donné ensuite les formules des prédicteurs optimaux de l'observation future et de sa matrice de covariance.

Toutefois pour faire fonctionner le filtre de Kalman, nous avons supposé la connaissance des paramètres du système et des matrices de covariance des perturbations. Dans la plupart des situations concrètes ces paramètres et ces statistiques sont inconnus. Dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser des techniques d'estimation pour estimer les paramètres inconnus. A l'heure actuelle, peu de travaux ont été consacrés à ce type de problème d'estimation, on peut citer plus particulièrement ceux de Fargeon [12], Mehra [26, 27, 28], Sarris [35], Cooley et Prescott [8].

Dans cet article, nous avons imposé la forme du modèle d'évolution du vecteur des paramètres de la régression. On pourrait, cependant, poser le problème à l'envers i.e., étant donné un processus gaussien stationnaire $\{y_t, t \in Z\}$ (ici la variable endogène du modèle de régression), existe-t-il un processus markovien $\{\boldsymbol{\beta}_t, t \in Z\}$ à valeurs dans R^k, une matrice F et des bruits blancs $\{w_t\}$ et $\{\varepsilon_t\}$ tel que $\boldsymbol{\beta}_{t+1} = F\boldsymbol{\beta}_t + \mathbf{w}_{t+1}$ et $y_t = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta}_t + \varepsilon_t$. Ce problème rentre dans le cadre plus général du problème de la représentation markovienne étudiée par Faurre [10], Faurre, Clerget, Germain [11], Gevers [15], Akaike [1, 2], Ruckebusch [33, 34], Lindquist et Picci [23, 24].

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Akaike, *Stochastic Theory of Minimal Realization*, I.E.E.E. Trans. A.C., vol. 19, 1974.
2. H. Akaike, *Markovian Representation of Stochastic Processes by Canonical Variables*, S.I.A.M. J. Control, vol. 13, 1975.
3. A. Bensoussan, *Filtrage optimal des systèmes linéaires*, Dunod, Paris, 1971.
4. A. Bensoussan, *Utilisation du filtre de Kalman pour la prédiction des séries économiques*, Économie appliquée, vol. 27, n° 2-3, 1974.
5. G. E. P. Box et G. M. Jenkins, *Time Series Analysis Forecasting and Control*, Rev. Ed., Holden Day, 1976.
6. R. L. Brown, J. Durbin et J. M. Evans, *Technique for Testing the Constancy of Regression Relationships over Time*, J. Roy. Stat. Soc., B, vol. 37, n° 2, 1975, p. 149-192.
7. G. C. Chow, *Tests of the Equality between two Sets of Coefficients in two Linear Regression*, Econometrica, vol. 28, 1960, p. 561-605.
8. T. F. Cooley et E. Prescott, *Estimation in the Presence of Stochastic Parameter Variation*, Econometrica, vol. 44, n° 1, janvier 1976.
9. D. B. Duncan et S. D. Horn, *Linear Dynamic Recursive Estimation from the Wiewpoint of Regression Analysis*, J.A.S.A., vol. 67, n° 340, 1970.

10. P. Faurre, *Réalisations markoviennes de processus stationnaires*, Rapport de recherche n° 13, mars 1973, I.R.I.A., Rocquencourt.
11. P. Faurre, M. Clerget et F. Germain, *Opérateurs rationnels positifs*, Dunod, Paris, 1979.
12. C. Fargeon, *Estimation bayesienne à structure parallèle et réalisation sur microprocesseurs*, Thèse de Docteur Ingénieur, E.N.S.A.E., Toulouse, décembre 1978.
13. K. Garbade, *Two Methods for Examining the Stability of Regression Coefficients*, J.A.S.A., vol. 72, 1977, p. 54-63.
15. M. R. Gevers, *Structural Properties of Realizations of Discret-Time Markovian Processes*, Technical Report n° 7050-19, Information System Laboratory, Stanford, 1972.
16. C. W. J. Granger et P. Newbold, *Forecasting Economic Time Series*, Academic Press, 1977.
17. E. J. Hannan, *Multiple Time Series*, J. Wiley, 1970.
18. A. C. Harvey, *The Estimation of Time Varying Parameters from Panel Data*, Annales de l'I.N.S.E.E., n° 30-31, avril-septembre 1978, p. 203-226.
19. J.-P. Indjehagopian, *Les processus stochastiques vectoriels ARMA : une procédure d'identification*, Revue de Statistique appliquée, vol. XXVII, n° 3, 1979, p. 33-45.
20. G. M. Jenkins, *Practical Experiences with Modeling and Forecasting Time Series*, A.G.J.P. Publication, 1979.
21. A. H. Jazwinsky, *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York, 1970.
22. R. E. Kalman, *A new Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, J. Basic Engineering, vol. 82, 1960, p. 35-45.
23. A. Lindquist et G. Picci, *On the Stochastic Realization Problem*, S.I.A.M. J. Control and Optimization, vol. 17, n° 3, mai 1979.
24. A. Lindquist et G. Picci, *Realization Theory for Multivariate Stationary Gaussian Processes I: State Space Construction*, 4th International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems, juillet 1979, Delft, Holland.
25. J. F. MacGregor, *Topics in Control of Linear Processes Subject to Stochastic Disturbance*, Ph. D. Thesis, University of Wisconsin, 1972.
26. R. K. Mehra, *On the Identification of Variances and Adaptative Kalman Filtering*, I.E.E.E. Trans. on Aut. Control, vol. AC 15, n° 2, avril 1970.
27. R. K. Mehra, *On-Line Identification of Linear Dynamic Systems with Applications to Kalman Filtering*, I.E.E.E. Trans. on Aut. Control, vol. AC 16, n° 1, février 1971.
28. R. K. Mehra, *Approach to Adaptative Filtering*, I.E.E.E. Trans., vol. AC 17, n° 6, octobre 1972.
29. A. Monfort, *Approche de Box et Jenkins et approche économétrique des séries temporelles*, Ann. I.N.S.E.E., n° 32, 1978.
30. M. Nerlove, D. M. Grether et J. L. Carvalho, *Analysis of Economic Time Series*, Academic Press, 1979.
31. B. Rosenberg, *The Analysis of a Cross Section of Time Series by Stochastically Convergent Parameter Regression*, Ann. Econ. and Social Measurement, vol. 2, 1973, p. 399-428.
32. B. Rosenberg, *A Survey of Stochastic Parameter Regression*, Ann. Econ. and Social Measurement, vol. 2/4, 1973, p. 381-397.

33. G. Ruckebusch, *Représentation markovienne de processus gaussiens stationnaires*, Thèse de 3[e] cycle, Paris-VI, 1975.

34. G. Ruckebusch, *Représentation markovienne de processus gaussiens stationnaires et applications statistiques*, Rapport interne n° 18, 1978, Centre de Mathématiques appliquées, École polytechnique.

35. A. H. Sarris, *A General Algorithm for Simultaneous Estimation of Constant and Randomly-Varying Parameters in Linear Relations*, working paper n° 38, N.B.E.R. M.I.T., avril 1974.

36. P. C. Young, *Applying Parameter Estimation to Dynamic Systems*, Control Engineering, vol. 16, (10), 1969, p. 119-125; vol. 16, (11), 1969, p. 118-124.

37. P. C. Young, *Recursive Approaches to Time Series Analysis*, Bull. Inst. Math. Application, vol. 10, 1974, p. 209-224.

38. K. F. Wallis, *Multiple Time Series and the Final Form of Econometric Models*, Econometrica, vol. 45, n° 6, septembre 1977.

39. A. Zellner et F. Palm, *Time Series Analysis and Simultaneous Equation Econometric Models*, J. Econometrics, vol. 2, 1974.