Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

G. Chaty
M. Chein

Réductions de graphes et systèmes de Church-Rosser

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 15, nº 2 (1981), p. 109-117.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1981__15_2_109_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 15, n° 2, mai 1981, p. 109 à 117)

RÉDUCTIONS DE GRAPHES ET SYSTÈMES DE CHURCH-ROSSER (*)

par G. CHATY et M. CHEIN [1]

Résumé. — *On utilise souvent des techniques de réduction pour rédoudre des problèmes d'Optimisation Combinatoire. Lorsqu'il y a des choix possibles, l'ordre dans lequel on effectue ces diverses réductions peut avoir une influence sur le résultat final. On montre dans cet article, comment les systèmes de Church-Rosser fournissent un cadre adéquat pour étudier cette question dans le cas de certains problèmes concernant les graphes orientés.*

Mots clés : Graphes, décompositions, réduction, systèmes de Church-Rosser.

Abstract. — *In Combinatorial Optimization reduction techniques are often useful. When, for a given problem, some choices arise, the order of the reductions may be important for the final result. In this paper one shows that Church-Rosser systems are a good frame for studying this question in the case of digraph problems.*

Keywords: Graphs, decompositions, reductions, Church-Rosser's systems.

1. INTRODUCTION

On utilise couramment en Optimisation Combinatoire des techniques de décomposition ou de réduction pour simplifier la résolution d'un problème, ou pour construire des heuristiques.

Rappelons les grandes lignes de ces méthodes sur des problèmes concernant les graphes.

Méthode par réduction : ayant à résoudre un problème P sur un graphe G, on cherche des opérations (suppression des sommets isolés, des sommets ou arêtes pendants, des sommets de degré 2, ...) qui conduisent à un graphe G' plus petit que G — d'où le terme de réduction — de telle sorte qu'à partir d'une solution de P sur G' on puisse construire une solution de P sur G. Il s'agit donc de trouver :

(1) un « bon » algorithme pour obtenir G' à partir de G;

(2) un théorème, et un « bon » algorithme, liant une solution de P sur G' à une solution de P sur G.

(*) Reçu février 1980.
[1] Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris-VI, Institut de Programmation, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

Méthode par décomposition : on décompose G en $G_1, G_2, \ldots, G_k$ chaque G_i étant plus petit que G, de telle sorte qu'à partir d'une solution de P sur les G_i on puisse construire une solution de P sur G. Cette méthode peut être considérée comme une généralisation de la méthode par réduction et l'on doit résoudre à nouveau des problèmes du type (1) et (2).

Lorsque l'on a des choix possibles pour réaliser une réduction/décomposition, ou lorsque l'on dispose, pour un même problème P, de plusieurs théorèmes de réduction/décomposition une question se pose : l'ordre dans lequel on effectue les diverses réductions/décompositions a-t-il une influence sur le résultat final ? ou bien peut-on procéder de n'importe quelle manière en étant assuré d'obtenir le même résultat final ?

Les systèmes de Church-Rosser fournissent un cadre adéquat pour étudier cette question.

Signalons également une question que nous n'aborderons pas dans cet article : la caractérisation des graphes complètement réductibles pour un ensemble donné de réductions/décompositions. L'intérêt algorithmique de ce dernier problème est le suivant : supposons que le problème P soit un problème NP-difficile et que (1) et (2) admettent des algorithmes polynomiaux. La classe des graphes complètement réductibles est alors une classe sur laquelle P admet une solution polynomiale.

Le but de cet article est de montrer une mise en œuvre de ces techniques à partir de quelques problèmes de cheminement concernant les graphes orientés. Nous reprenons ainsi des idées de Chaty *et al.* [1] et de Liu *et al.* [6].

Le paragraphe 2 est un rappel des notions de base concernant les systèmes de Church-Rosser. Nous utilisons la terminologie de Huet [4].

Dans le paragraphe 3 nous considérons quelques réductions classiques, qui sont polynomiales, et nous montrons comment elles induisent des systémes de Church-Rosser.

Dans le dernier paragraphe nous donnons des applications des résultats précédants aux problèmes suivants : indice de partition des sommets en chemins, valeur d'une dissection et nombre de sauts.

2. DÉFINITIONS

2.1. Notations

Nous reprenons dans ce paragraphe les notations de Huet [4].

R étant une relation sur un ensemble E, un élément x de E est une *forme*

R-normale s'il n'existe aucun y de E tel que : $x\,R\,y$. Si x et z sont deux éléments de E, x est une *forme R-normale de z* si x est une forme R-normale et si $z\,R^*\,x$, où R^* est la fermeture réflexo-transitive de R. Nous utiliserons la notation R^r pour la fermeture réflexive de R.

$\uparrow$ et $\downarrow$ représentent les deux relations sur E définies par :

$x \uparrow y$ si et seulement si $\exists\, z$ tel que $z\,R^*\,x$ et $z\,R^*\,y$;

$x \downarrow y$ si et seulement si $\exists\, z$ tel que $x\,R^*\,z$ et $y\,R^*\,z$.

Une relation R est *localement confluente* si et seulement si : quels que soient x, y, z tels que $x\,R\,y$ et $x\,R\,z$, on a $y \downarrow z$.

Une relation R est *confluente* [on dit aussi que $(E,\ R)$ est un *système de Church-Rosser*] si et seulement si : quels que soient x et y tels que $x \uparrow y$ on a $x \downarrow y$.

Une relation R est *noethérienne* si et seulement s'il n'existe pas de séquence infinie : $x_1\,R\,x_2\,R\ \ldots\ R\,x_n\ \ldots\ (x_i \neq x_j,\ i \neq j)$.

PROPRIÉTÉ 1 [4] : *Si R est noethérienne alors R est confluente si et seulement si elle est localement confluente.*

PROPRIÉTÉ 2 [4] : *Si R est confluente alors la forme R-normale de tout élément, si elle existe, est unique.*

THÉORÈME (Rosen [7]) : *R_1 et R_2 étant deux relations confluentes sur E, si : quels que soient x, y, z tels que $x\,R_1\,y$ et $x\,R_2\,z$ il existe t tel que : $y\,R_2^*\,t$ et $z\,R_1^r\,t$, alors $R_1 \cup R_2$ est confluente.*

Soit $\mathscr{G}$ l'ensemble des classes de graphes finis isomorphes. A partir d'une relation r sur les graphes on peut définir une relation R dans $\mathscr{G}$ de la manière suivante : g et h étant deux éléments de $\mathscr{G}$ on a : $g\,R\,h$ si et seulement si $\exists\, G \in g$ et $\exists\, H \in h$ tels que $G\,r\,H$.

3. QUELQUES RÉDUCTIONS CONFLUENTES DANS LES GRAPHES

3.1. Réductions de certains sommets de degré 1

Considérons dans un graphe $G=(X,\ U)$, s'ils existent, une source x $(d^-(x)=0)$ et un arc pendant extérieurement xy $(d^+(y)=0,\ d^-(y)=1)$. Soit $q_1(G,\ x,\ y)$ le sous-graphe de G obtenu en supprimant les sommets x et y.

Nous pouvons donc définir une relation P_1 dans $\mathscr{G}$, à partir de la relation p_1 définie par : $G\,p_1\,H$ si et seulement si il existe un arc pendant extérieurement xy avec $H=q_1(G,\ x,\ y)$.

PROPOSITION 1 : *P_1 est confluente.*

En effet, P_1 est une relation noethérienne, il suffit donc de démontrer qu'elle est localement confluente, c'est-à-dire que :

$$\forall g, g_1, g_2 \in \mathcal{G}, \qquad g P_1 g_1 \quad \text{et} \quad g P_1 g_2 \quad \Rightarrow \quad g_1 \downarrow g_2.$$

Soit $G \in g$, $G_1 \in g_1$ avec $G_1 = q_1$ (G, x_1, y_1), $G' \in g$, $G_2 \in g_2$ avec $G_2 = q_1$ (G', x_2, y_2). S'il existe un isomorphisme φ de G sur G' tel que : $x_2 = \varphi(x_1)$, alors q_1 $(G, x_1, y_1) \simeq q_1$ (G', x_2, y_2) donc $G_1 \simeq G_2$ et $g_1 = g_2$.

Dans les autres cas, soit φ un isomorphisme de G sur G', on a alors :

$$q_1(\varphi(G_1), x_2, y_2) = q_1(G_2, \varphi(x_1), \varphi(y_1)) \quad \text{(cf. } \textit{fig.}\ 1). \quad \blacksquare$$

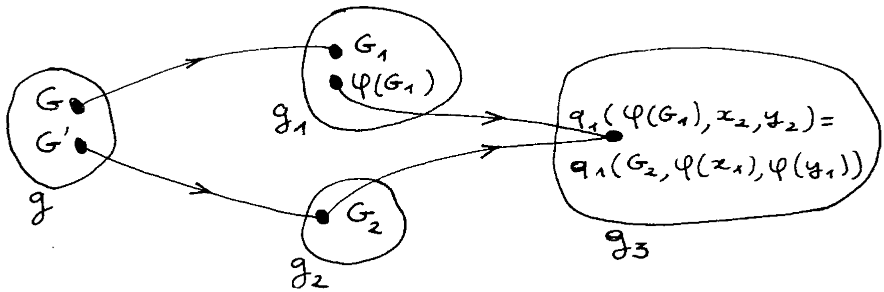

Fig. 1

D'une manière duale, au sens de l'orientation des arcs, si y est un puits d'un graphe G et si xy est un arc pendant intérieurement de G, donc si l'on a $d^+(y) = 0$, $d^+(x) = 1$ et $d^-(x) = 0$, on note par $q_2(G, x, y)$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant les sommets x et y. On peut donc définir comme précédemment une relation P_2 sur $\mathcal{G}$, et l'on a :

PROPOSITION 1' : *P_2 est confluente.*

Notons par P la réunion des deux relations P_1 et P_2.

PROPOSITION 2 : *P est confluente.*

En utilisant le théorème de Rosen il suffit de montrer que $g P_1 g_1$ et $g P_2 g_2 \Rightarrow \exists h \in \mathcal{G}$, $g_1 P_2^* h$ et $g_2 P_1^r h$. Reprenons les mêmes notations que dans la proposition 1 en modifiant les hypothèses sur G_2 : $d^-(x_2) = 0$ $d^+(x_2) = 1$ et $d^+(y_2) = 0$, $G_2 = q_2$ (G', x_2, y_2). S'il existe un isomorphisme φ de G sur G' avec $x_2 = \varphi(x_1)$, alors la composante connexe de x_1 est réduite à l'arc $x_1 y_1$, et $G - \{x_1 y_1\}$ définit une classe h satisfaisante.

Dans les autres cas : $q_2(\varphi(G_1), x_2, y_2) = q_1(G_2, \varphi(x_1), \varphi(y_1))$, si φ est un isomorphisme de G sur G' (cf. *fig.* 2). ■

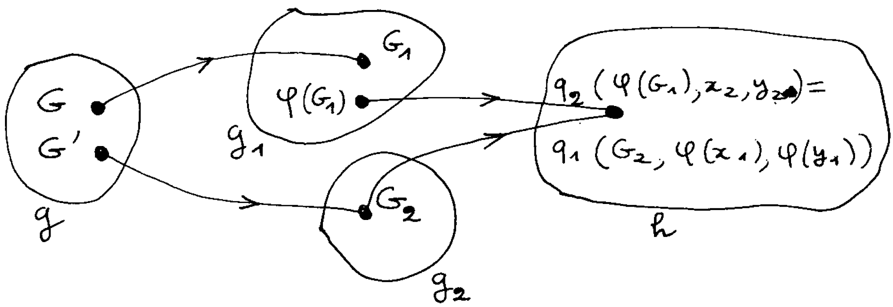

Fig. 2

Une autre réduction des arcs pendants extérieurement est parfois utile. Si xy est un arc pendant extérieurement d'un graphe G nous noterons par $q'_1(G, x, y)$ le graphe partiel de G obtenu par suppression de tous les arcs sortant de x, et par suppression du sommet y.

On définit naturellement une relation P'_1, une relation duale P'_2, et $P' = P'_1 \cup P'_2$. On peut alors établir facilement :

PROPOSITION 3 : *P'_1, P'_2, P' sont des relations confluentes.*

3.2. Réduction des sommets jumeaux

x et y sont *deux sommets jumeaux* d'un graphe G dont la relation successeur est représentée par Γ s'ils vérifient :

$$\Gamma(x) = \Gamma(y) \qquad \text{et} \qquad \Gamma^-(x) = \Gamma^-(y).$$

La relation E_j définie sur l'ensemble des sommets de G par $x E_j y$ si et seulement si x et y sont jumeaux, est une relation d'équivalence. Un sommet appartenant à une classe non triviale est appelé un *j-sommet*.

PROPOSITION 4 : *Si H est obtenu à partir de G par suppression d'un j-sommet, alors deux sommets à la fois dans G et H sont jumeaux dans l'un si et seulement si ils le sont dans l'autre.*

En effet, supposons que H soit obtenu à partir de G par suppression de x' sommet jumeau de x. Pour tout sommet z de H on a :

$$\Gamma_H(z) = \Gamma_G(z) - \{x'\} \qquad \text{et} \qquad \Gamma_H^-(z) = \Gamma_G^-(z) - \{x'\}.$$

Soient y et y' deux sommets jumeaux de H. Si yx' est un arc de G, alors yx est un arc de G, donc de H, donc $y'x$ est un arc de H, donc de G, et $y'x'$ est alors un arc de G. De même si $x'y$ est un arc de G alors $x'y'$ est un arc de G, avec les relations ci-dessus, ceci établit donc que y et y' sont deux sommets jumeaux de G. La réciproque est aussi simple. ■

PROPOSITION 5 : *Si x et x' sont deux sommets jumeaux de G alors $G-x$ et $G-x'$ sont deux graphes isomorphes.*

Immédiat.

Nous notons par J la relation sur $\mathscr{G}$ définie à partir de : $G\,j\,H$ si et seulement si H est obtenu à partir de G par suppression d'un j-sommet.

PROPOSITION 6 : *J est confluente.*

Nous allons vérifier que J est localement confluente. Supposons que nous ayons $g\,J\,h_1$ et $g\,J\,h_2$, et soient $H_1=G-\{x\}$, $H_2=G'-\{y\}$, avec G et G' éléments de g, $H_1\in h_1$, $H_2\in h_2$, x j-sommet de G et y j-sommet de G'. Soit φ un isomorphisme de G' sur G.

Si x et $\varphi(y)$ sont des sommets jumeaux de G alors $H_1\simeq H_2$ et donc $h_1=h_2$ (prop. 5). Si x et $\varphi(y)$ ne sont pas dans la même classe modulo E_j alors, d'après la proposition 4, $\varphi(y)$ est un j-sommet de $G-\{x\}$ et $\varphi^{-1}(x)$ est un j-sommet de $G'-\{y\}$. De plus $G-\{x,\varphi(y)\}$ et $G'-\{y,\varphi^{-1}(x)\}$ sont isomorphes, et si on note par k leur classe on a : $h_1\,J\,k$ et $h_2\,J\,k$. ■

La forme J-normale de g est la classe des graphes isomorphes au graphe quotient G/E_j, si $G\in g$.

$P\cup J$ et $P'\cup J$ ne sont pas des réductions confluentes. Nous donnons ci-dessous un exemple pour $P\cup J$ il est facile de faire de même pour $P'\cup J$.

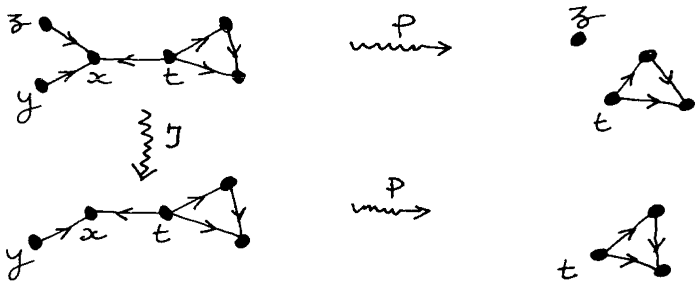

FIG. 3

Soit xy un arc pendant extérieurement d'un graphe G. Notons par $s_1(G,x,y)$ le graphe obtenu à partir de G par la suppression des sommets x et y, puis par la suppression des sommets isolés.

On peut définir une relation PI_1 dans $\mathscr{G}$, à partir de la relation pi_1 définie par : $G\, pi_1\, H$ ssi $H = s_1(G, x, y)$. On peut alors définir comme en 3.1 les relations PI_2, $PI = PI_1 \cup PI_2$, PI'_1, PI'_2 et $PI' = PI_1 \cup PI_2$. On peut alors démontrer facilement :

Proposition 7 : *PI_1, PI_2, PI, PI'_1, PI'_2, PI' sont des relations confluentes.* Nous allons maintenant démontrer :

Proposition 8 : *$PI \cup J$ est une relation confluente.*

Démonstration : Soit φ un isomorphisme de G sur G'. Supposons que $G_1 = s_1(G, x, y)$ et $G_2 = G' - z$, où z est un j-sommet de G'. (Remarquons qu'un j-sommet ne peut pas être origine d'un arc pendant extérieurement.

Si $\varphi^{-1}(z) \notin G_1$ alors $\varphi(x)\,\varphi(y)$ est un arc pendant extérieurement de G_2. On a alors $s_1(G_2, \varphi(x), \varphi(y)) = \varphi(G_1)$ et on peut appliquer le théorème de Rosen (cf. *fig.* 4).

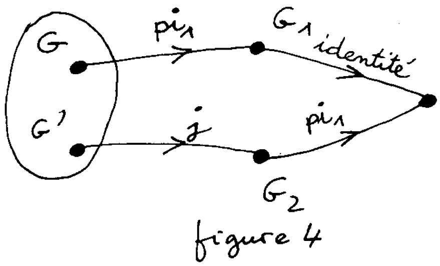

Fig. 4

Si $\varphi^{-1}(z) \in G_1$ alors :

si $\varphi(x)\,\varphi(y)$ est un arc pendant extérieurement à G_2 on a $s_1(G_2, \varphi(x), \varphi(y)) = \varphi(G_1) - z$, on conclut alors avec le théorème de Rosen;

si $\varphi(x)\,\varphi(y)$ n'est pas pendant extérieurement à G_2 alors $z = \varphi(y)$ et il existe un arc pendant extérieurement à G_2 qui est de la forme $\varphi(x)u$, on a alors $s_1(G_2, \varphi(x), u) = \varphi(G_1)$, ce qui permet de conclure. ■.

On démontrerait de même que $PI' \cup J$ est confluente.

4. APPLICATIONS A QUELQUES PROBLÈMES DE CHEMINEMENT

Considérons les invariants suivants :

$p(G)$, l'indice de C-partition du graphe G, qui est égal au nombre minimal de chemins élémentaires de G qui partitionnent l'ensemble des sommets de G; (*cf.* [5]);

$v(G)$, la valeur d'une dissection de G, qui est égale au nombre minimal de chemins élémentaires dans une partition en chemins et en circuits élémentaires de l'ensemble des sommets de G; (*cf.* [3]);

$s(G)$, le nombre de sauts de G, qui est égal au nombre minimal d'arcs qu'il faut ajouter à G pour obtenir un graphe ayant un chemin hamiltonien ceci sans créer de nouveau circuit (*cf.* [1, 2, 3]).

Ce dernier invariant est intéressant dans la classe des graphes sans circuit, et sur cette classe de graphes on a : $v(G)=p(G)$.

En reprenant les notations introduites dans les paragraphes précédents, nous pouvons énoncer de la manière suivante des théorèmes de réduction obtenus par Habib et Lambert pour les invariants ci-dessus :

$R1$: $v(q_1\,(G, x, y))=v\,(G)+1$ (p. 21 de [3]);

$R2$: $p\,(q'_1\,(G, x, y))=p(G)$ (p. 27 de [5]);

$R3$: si G est un graphe sans circuit : $s\,(q_1\; G, x, y))=s\,(G)-1$ (p. 63 de [3]);

$R4$: si x est un j-sommet d'un graphe sans circuit G : $s(G-x)=s(G)-1$. Ceci est une conséquence immédiate du théorème 1, p. 75, de [3].

Pour toutes les réductions considérées dans le paragraphe 3 il est très simple de construire des algorithmes polynomiaux pour obtenir les formes normales. De plus les démonstrations des théorèmes de réduction rappelés ci-dessus permettent de construire facilement une solution sur G à partir d'une solution sur le graphe réduit. Enfin si x est un sommet isolé de G on a : $v(G)=v\,(G-x)+1$; $p(G)=p\,(G-x)+1$ et $s\,(G)=s\,(G-x)+1$.

On peut donc utiliser R1 et la proposition 2 pour simplifier l'étude de la valeur d'une dissection dans un graphe quelconque, R2 et la proposition 3 pour simplifier l'étude de l'indice de C-partition d'un graphe quelconque, et utiliser R3 et R4 avec la proposition 8 pour simplifier l'étude du nombre de sauts dans un graphe sans circuit.

C'est à partir de cette dernière application que nous avons été amené à utiliser les relations confluentes. En effet nous avions démontré directement la proposition 8, ce qui revenait en fait, à démontrer le théorème de Rosen.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Chaty, M. Chein, P. Martin et G. Petolla, *Number of Jumps and Ordered Matchings in Bipartite Digraphs*, Rapport de rech., n° 5, 1978, Groupe de recherche, n° 22, C.N.R.S.
2. M. Chein et M. Habib, *Jumps in Digraphs and Partial Orders: an Introduction*. Annals of Discrete Math., vol. 9, 1980. p. 189-194.

3. M. HABIB, *Partition en chemins des sommets et sauts dans les graphes sans circuit*, Thèse, Université Paris-VI, 1975.
4. G. HUET, *Confluent Reductions: Abstract Properties and applications to Term Rewriting Systems*, J.A.C.M., vol. 27, 1980, p. 797-821.
5. G. LAMBERT, *Indice de C-partition des sommets d'un graphe, algorithmes de recouvrement*, Thèse, Université Paris-VI, 1975.
6. P. C. LIU et R. C. GELDMACHER, *Graph Reducibility*, Utilitas Math., Congres. Num., vol. 15, 1976, p. 433-445.
7. B. ROSEN, *Tree-Manipulating Systems and Church-Rosser Property*, J.A.C.M., vol. 20, 1973, p. 160-187.