

J. VAN DER STEEN

A. HENRY-LABORDÈRE

**Un algorithme sous-optimal pour construire un
graphe K -arête connexe de coût minimal**

*Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche
opérationnelle. Recherche opérationnelle*, tome 15, n° 2 (1981),
p. 119-127.

http://www.numdam.org/item?id=RO_1981__15_2_119_0

© AFCET, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN ALGORITHME SOUS-OPTIMAL POUR CONSTRUIRE UN GRAPHE K -ARÊTE CONNEXE DE COÛT MINIMAL (*)

par J. VAN DER STEEN ⁽¹⁾ et A. HENRY-LABORDÈRE ⁽²⁾

Résumé. — Soient X un ensemble de sommets (de cardinal $n \geq 2$) et K un entier ($1 \leq K \leq n-1$). L'algorithme que nous présentons résout principalement le problème suivant : construire sur X un graphe simple non orienté K -arête connexe [1], dont une itération typique revient à :

- identifier l'ensemble X^k des sommets de plus faible degré k dans le graphe partiel déjà construit;
- construire sur X^k un arbre en n'utilisant que des arêtes encore disponibles;
- incorporer ces arêtes au graphe partiel déjà construit. Le processus est arrêté lorsque tous les sommets sont de degré K au moins et nous montrerons que le graphe ainsi obtenu est K -arête connexe. On notera que ce résultat n'est non trivial que pour des valeurs de K strictement inférieures à $\lfloor n/2 \rfloor$ car sinon il est connu [2] que tout graphe dont les sommets sont de degré K au moins est alors automatiquement K -arête connexe.

Le choix particulier à chaque étape d'un arbre de coût minimal maintenant, conduit tout naturellement à une heuristique résolvant de manière sous-optimale le problème de la construction sur X d'un graphe K -arête connexe de coût globalement minimal.

Mots clés : Graphe minimal, graphe K -arête connexe.

Abstract. — Let us denote by X a set of n vertices ($n \geq 2$) and by K an integer ($1 \leq K \leq n-1$). An algorithm is proposed, to construct a simple, nondirected, K -edge connected graph on X , consisting in the following steps:

- mark the subset X^k of vertices with degree k in the current graph G^k ;
- construct a tree on X^k , using edges not yet in G^k ;
- form G^{k+1} incorporating this tree with G^k .

The algorithm terminates when all vertices have degree K ; it will be proved that G^K is then K -edge connected.

Furthermore, constructing minimum spanning trees on the X^k 's, leads to a straightforward heuristic for an approximate solution of the minimum K -edge connected graph problem.

Keywords: Minimum graph, K -edge connected graph.

NOTATIONS

$$X = \{ 1, 2, \dots, n \}.$$

\mathcal{U} est l'ensemble des arêtes du graphe simple complet sur X .

$G^k = [X, \mathcal{U}^k]$ est le graphe existant sur X au début de la $(k+1)$ -ième itération, i. e. à la conclusion de la k -ième.

(*) Reçu novembre 1979.

⁽¹⁾ S.I.T.A., Société Internationale de Télécommunications Aéronautiques, 112, avenue Charles-de-Gaulle, 92522 Neuilly-sur-Seine.

⁽²⁾ École Nationale Ponts et Chaussées, Paris.

$d^k(i)$ est le degré du sommet i dans G^k .

$$X^k = \{ i \in X; d^k(i) = k \}.$$

$H^k = [X^k, \mathcal{V}^k]$ est l'arbre construit sur X^k au cours de la $(k+1)$ -ième itération ($\mathcal{V}^k \subseteq \mathcal{U} - \mathcal{U}^k$).

Z est une partie stricte non vide (parfaitement arbitraire) de X .

$w^k(Z)$ est le cocycle de G^k formé des arêtes de \mathcal{U}^k incidentes à Z , en nombre $|w^k(Z)|$.

$$Z^k = Z \cap X^k.$$

$$\underline{Z}^k = (X - Z) \cap X^k.$$

$$d^k(Z) = \underset{i \in Z}{\text{Min}} d^k(i).$$

K' ($1 \leq K' \leq K$) est l'indice d'arrêt de l'algorithme.

ALGORITHME :

(i) $\equiv k \leftarrow 0; \mathcal{U}^k \leftarrow \emptyset$.

$(k+1)$ -ième itération :

(ii) \equiv repérer l'ensemble X^k ;

(iii) \equiv construire sur X^k un arbre (de coût minimal) $H^k = (X^k, \mathcal{V}^k)$ avec $\mathcal{V}^k \subseteq \mathcal{U} - \mathcal{U}^k$;

(iv) \equiv test : la construction de H^k a-t-elle été possible ?

(v-1) \equiv non : FIN # 1;

(v-2) \equiv oui : $\mathcal{U}^{k+1} \leftarrow \mathcal{U}^k \cup \mathcal{V}^k$;

(vi) $\equiv k, K' \leftarrow k+1$;

(vii) \equiv test : k a-t-il atteint la valeur K ?

(viii-1) \equiv oui : FIN # 2;

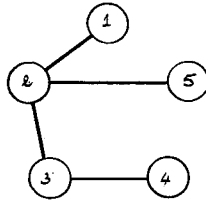
(viii-2) \equiv non : aller en (ii).

N.B. : K' et non K est le véritable indice d'arrêt de l'algorithme qui, dans certains cas, peut demeurer strictement plus petit que la valeur désirée K . Les exemples qui suivent illustrent dans quelles circonstances.

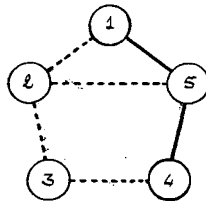
EXEMPLES

Exemple # 1 : $n = 5, K = 3$.

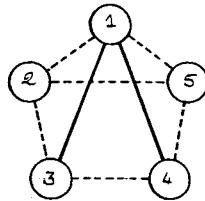
Tous les sommets sont de degré 0 au début de la première itération. L'arbre H^0 doit donc être construit sur X et le graphe $G^1 = H^0$ se présente comme suit :



$X^1 = \{1, 4, 5\}$. Un arbre H^1 (dont les arêtes sont indiquées en traits pleins sur la figure suivante, tandis que les arêtes de G^1 y ont été reportées en pointillé) est construit sur X^1 et le graphe G^2 apparaît ainsi :



Au début de la troisième et dernière itération, $X^2 = \{1, 3, 4\}$ et la construction de H^2 est obtenue en joignant au sommet 1 les sommets 3 et 4. Le graphe G^3 prend donc l'allure suivante :



et la FIN#2 de l'algorithme est rencontrée. On a ici $K' = K$.

Exemple #2 : Même exemple que précédemment, mais $K = 4$. Au début de la 4^e itération, $X^3 = \{2, 3, 4, 5\}$. La construction d'un arbre H^3 sur X^3 s'avère impossible, un trop grand nombre d'arêtes ayant déjà été utilisé au cours des itérations précédentes. La FIN#1 de l'algorithme est rencontrée et seul un résultat dégradé $K' < K$ peut être obtenu. Nous reviendrons dans la discussion sur cette possibilité d'arrêt prématuré et une amélioration de l'algorithme de base sera proposée.

PROPOSITIONS

PROPOSITION 1 : A l'issue de la k -ième itération ($1 \leq k \leq K'$), tout sommet est dans G^k de degré k au moins et en particulier deux sommets au moins y sont de degré k exactement.

Cette proposition 1, qui résulte trivialement du fait que tout arbre est connexe et possède au moins deux sommets pendants, montre que les ensembles X^k contiennent toujours au moins deux éléments, permettant ainsi à l'algorithme de progresser. Elle montre de plus que les graphes G^k , s'ils sont k -arête connexes, ne peuvent certainement pas être $(k+1)$ -arête connexes.

PROPOSITION 2 : A l'issue de la k -ième itération ($1 \leq k \leq K'$), le graphe G^k est k -arête connexe.

Nous allons montrer en fait l'inégalité $|w^k(Z)| \geq k$, dont notre proposition 2 découle évidemment en raison de la parfaite généralité de la bipartition $(Z, X-Z)$ de X .

LEMME : Soient $H = [X, \mathcal{U}]$ un arbre et Z une partie stricte non vide de X telle que Z ne contienne aucun des sommets de X pendants dans H ; alors le cardinal du cocycle $w(Z)$ est au moins égal à la valeur maximale d du degré des sommets de X contenus dans Z .

Preuve du lemme : Soit x un sommet de Z de degré d . Considérons d voyageurs situés en x et désirant se rendre dans $X-Z$ en empruntant les arêtes de H sans jamais rebrousser chemin ni jamais se rencontrer. Ils quittent donc x chacun par une arête différente. Il est clair qu'ils parviendront à leurs fins car Z est fini et ne contient ni cycle ni sommet pendant. Chacun de nos d voyageurs empruntant une arête de $w(Z)$ pour pénétrer dans $X-Z$, $w(Z)$ contient au moins d arêtes.

Q.E.D.

Preuve de la proposition 2 : Nous allons établir cette preuve par récurrence sur k , en remarquant que la proposition 2 est évidemment vraie à l'issue de la première itération. On la supposera donc vraie à l'issue des k premières et on établira $|w^{k+1}(Z)| \geq k+1$ à l'issue de la $(k+1)$ -ième. Considérons l'état de la situation au commencement de celle-ci; on distinguera deux cas mutuellement exclusifs (en vertu de la proposition 1) :

1. Les deux ensembles Z^k et \underline{Z}^k sont non vides.

Soient $x \in Z^k$ et $\underline{x} \in \underline{Z}^k$. Comme $\mathcal{V}^k \subseteq \mathcal{U} - \mathcal{U}^k$, une chaîne d'arêtes nouvellement introduites relie dans G^{k+1} x à \underline{x} à l'issue de la $(k+1)$ -ième itération, d'où $|w^{k+1}(Z)| \geq |w^k(Z)| + 1 \geq k+1$.

Q.E.D.

2. L'un des ensembles Z^k, \underline{Z}^k est vide (et pas l'autre).

Désignons alors par k_0 ($k_0 \geq 0$) le plus grand entier $< k$ tel que les ensembles Z^{k_0} et \underline{Z}^{k_0} soient simultanément non vides. Examinons la répartition entre Z et $X - Z$ des sommets de degré $k_0 + 1$ dans G^{k_0+1} : ces sommets sont soit pendants dans H^{k_0} et leur degré est passé de k_0 à $k_0 + 1$ au cours de la $(k_0 + 1)$ -ième itération, soit des sommets dont le degré était déjà $k_0 + 1$ dans G^{k_0} . Les uns comme les autres ne peuvent être répartis à la fois dans Z et dans $X - Z$ (k_0 ne serait pas maximal si $k_0 + 1$ est strictement plus petit que k ou Z^k et \underline{Z}^k seraient non vides si $k_0 + 1 = k$). L'ensemble X^{k_0+1} est donc contenu tout entier soit dans Z , soit dans $X - Z$. On supposera par exemple $X^{k_0+1} \subseteq X - Z$, i.e. $Z^{k_0+1} = \emptyset, \underline{Z}^{k_0+1} \neq \emptyset$. Plus généralement, en répétant les arguments qui précèdent et compte tenu de la proposition 1, l'état des ensembles Z^l et \underline{Z}^l varie, en fonction de l'indice l ($k_0 + 1 \leq l \leq k + 1$), comme indiqué dans le tableau suivant :

| | | | | | |
|-----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------------------------|
| l | k_0 | $k_0 + 1$ | ... | k | $k + 1$ |
| Z^l | non \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset ou non \emptyset |
| \underline{Z}^l | non \emptyset | non \emptyset | non \emptyset | non \emptyset | non \emptyset |

On notera que le choix $Z^{k_0+1} = \emptyset$ a impliqué $Z^k = \emptyset$.

Examinons maintenant la quantité $d^l(Z)$ ($k_0 \leq l \leq k + 1$) : il est clair que $d^{k_0}(Z) = k_0$ car tous les sommets de X sont de degré au moins k_0 à l'issue de la k_0 -ième itération et Z^{k_0} est non vide. Nous savons d'autre part que Z^{k_0+1}, \dots, Z^k sont vides. Par suite $d^l(Z)$, après un saut, doit demeurer constante et égale à $d^{k+1}(Z)$ lorsque l prend les valeurs $k_0 + 1, \dots, k, k + 1$, la construction des arbres H^{k_0+1}, \dots, H^k n'intéressant que l'ensemble $X - Z$. C'est dire du même coup qu'il doit en être de même de la quantité $|w^l(Z)|$ et l'on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} d^{k_0}(Z) < d^{k_0+1}(Z) = \dots = d^k(Z) = d^{k_0+1}(Z), \\ |w^{k_0}(Z)| < |w^{k_0+1}(Z)| = \dots = |w^k(Z)| = |w^{k+1}(Z)|. \end{array} \right.$$

Nous allons maintenant appliquer le lemme à l'arbre H^{k_0} pour lier le saut $|w^{k_0+1}(Z)| - |w^{k_0}(Z)|$ au saut de degré $d^{k_0+1}(Z) - d^{k_0}(Z)$, que l'on saura rattacher à des considérations d'indice par la proposition 1. Plus précisément, en vertu du lemme :

$$|w^{k_0+1}(Z)| - |w^{k_0}(Z)| \geq \text{Max}_{i \in Z} (d^{k_0+1}(i) - d^{k_0}(i)).$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{Max}_{i \in Z} (d^{k_0+1}(i) - d^{k_0}(i)) &\geq d^{k_0+1}(j) - d^{k_0}(j), & \forall j \in Z, \\ &\geq d^{k_0+1}(Z) - d^{k_0}(j), & \forall j \in Z. \end{aligned}$$

Écrivons cette inégalité pour un sommet j dans Z tel que :

$$d^{k_0}(j) = d^{k_0}(Z).$$

Alors :

$$\text{Max}_{i \in Z} (d^{k_0+1}(i) - d^{k_0}(i)) \geq d^{k_0+1}(Z) - d^{k_0}(Z).$$

Sachant que :

$$d^{k_0+1}(Z) = d^{k+1}(Z) \quad \text{avec} \quad d^{k+1}(Z) \geq k+1,$$

que :

$$d^{k_0}(Z) = k_0,$$

et que :

$$|w^{k_0}(Z)| \geq k_0 \quad (\text{hypothèse de récurrence}),$$

alors :

$$|w^{k_0+1}(Z)| \geq k_0 + (k+1) - k_0.$$

Mais comme enfin :

$$|w^{k_0+1}(Z)| = |w^{k+1}(Z)|,$$

il vient :

$$|w^{k+1}(Z)| \geq k+1.$$

Q.E.D.

DISCUSSION

Amélioration de l'algorithme initial

Nous avons vu sur un des exemples que la construction de l'arbre H^k n'était pas nécessairement possible pour tout k , le nombre d'arêtes disponibles dans le « réservoir » $\mathcal{U} - \mathcal{U}^k$ diminuant lorsque k augmente. Nous avons résolu pratiquement cette difficulté de la manière suivante, qui de plus améliore les performances de l'algorithme initial du point de vue du coût des graphes obtenus : lorsque k atteint des valeurs au moins égales à $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ nous ne construisons plus véritablement d'arbre sur X^k , compte tenu de la propriété très générale que nous avons rappelée dans le résumé, mais modifions le mécanisme d'ajout d'arêtes pour que chaque sommet soit simplement dans X^k l'extrémité d'une nouvelle arête au moins. Le degré de ces sommets augmente ainsi toujours d'une unité au moins, ce qui est alors suffisant pour que le graphe G^{k+1} soit $(k+1)$ -arête connexe.

En procédant de cette manière, il suffit que l'algorithme initial puisse fonctionner jusqu'à l'indice $[n/2] - 1$ pour que l'algorithme « modifié » puisse se dérouler jusqu'à l'indice maximal $n - 1$ si nécessaire. Les essais numériques que nous avons menés ont montré qu'en pratique, le résultat $K' = K$ pouvait être garanti.

Le problème de minorer efficacement le nombre d'itérations que peut correctement effectuer l'algorithme initial et que nous conjecturons au moins égal à $[n/2] - 1$ reste ouvert.

Complexité

L'algorithme présenté revenant à exécuter K fois un algorithme de type « Kruskal » (dont on trouvera un choix dans [3]), est donc d'une complexité de calcul en $O(Kn)$ si on utilise pour Kruskal un tri par substitution multiple en $O(n)$.

Deux alternatives algorithmiques pour résoudre (toujours de manière approchée) le problème qui nous intéresse sont données par Frank et Frisch [2].

La première consiste à superposer des circuits hamiltoniens de coût minimal comme nous superposons des arbres. Elle se heurte donc à des difficultés pratiques assez considérables et ne semble pas de plus conduire à des approximations satisfaisantes lorsque n est grand.

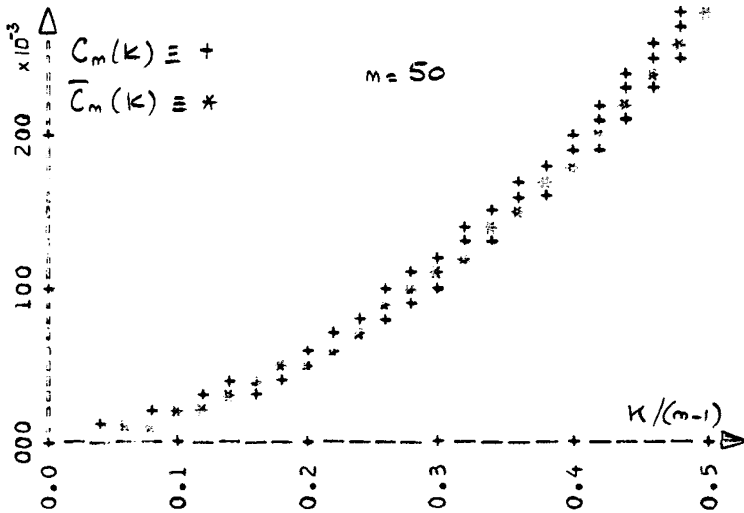
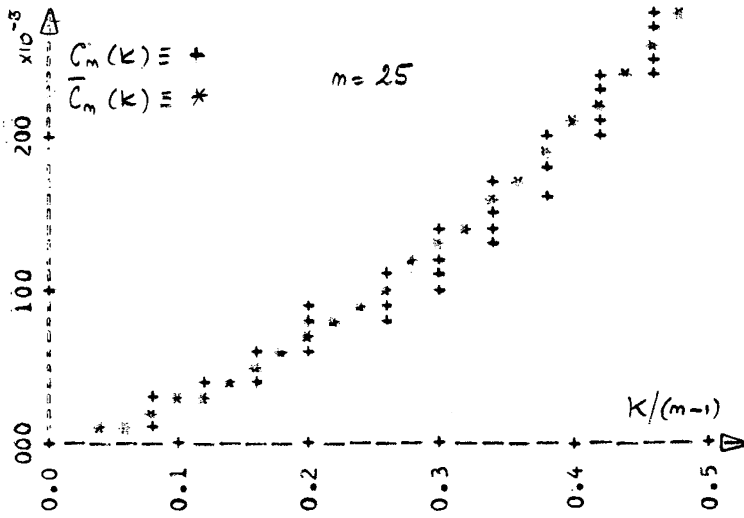
La seconde est dérivée de la première. Une procédure d'échanges d'arêtes (chaque échange exige le calcul d'une coupe minimale pour être efficace) est proposée pour améliorer le graphe partiel résultant de l'ajout d'un nouveau circuit.

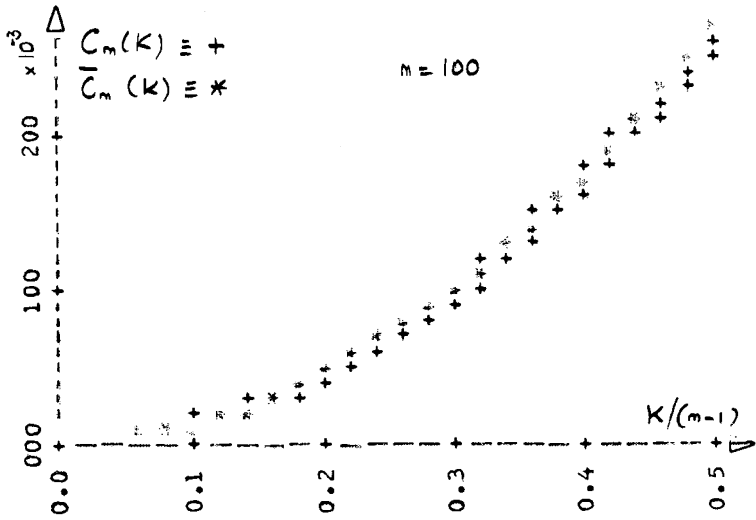
Essais numériques

Une centaine d'essais numériques systématiques ont été effectués afin de déterminer, pour des valeurs critiques de n ($n=25, 50, 100$), les variations en fonction de K ($K=1, 2, \dots, [n/2]-1$) des coûts $C_n(K)$ des graphes G^K . Ces coûts dépendent évidemment des coûts particuliers affectés aux arêtes de \mathcal{U} . Afin de déterminer un comportement « moyen » \overline{C}_n de la fonction C_n , 25 essais successifs pour la même valeur du couple (n, K) ont été tentés en tirant au sort de manière uniforme dans l'intervalle $]0, 1[$ les coûts des arêtes de \mathcal{U} . Ces coûts ont été ensuite normalisés de façon à maintenir égal à l'unité le coût du graphe complet sur X . La fonction \overline{C}_n , enfin, a été déterminée par régression sur les données acquises.

Les diagrammes ci-après illustrent les résultats obtenus. On y a figuré en abscisse les valeurs normalisées $K/(n-1)$ et en ordonnée les valeurs $C_n(K)$ et $\overline{C}_n(K)$ pour les trois valeurs de n retenues.

On notera la relative constance d'allure des fonctions \overline{C}_n et le peu de dispersion des échantillons $C_n(K)$ autour des valeurs $\overline{C}_n(K)$. Il est donc raisonnable d'utiliser les fonctions \overline{C}_n pour estimer *a priori* le coût de la K -arête connexité pour une classe de graphes donnée ou pour comparer notre heuristique à des résultats exacts ou à d'autres heuristiques pour lesquelles des données analogues seraient disponibles.





BIBLIOGRAPHIE

1. C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1973.
2. H. FRANK et I. FRISCH, *Communication, Transmission and Transportation Networks*, Addison-Wesley, New York, 1971.
3. M. GONDRAN et M. MINOUX, *Graphes et algorithmes*, Eyrolles, Paris, 1979.