Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

Alain Billionnet
Isabelle Caradot

Comparaison expérimentale d'algorithmes pour les problèmes de recouvrement et de maximisation d'une fonction pseudo-booléenne

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 17, nº 1 (1983), p. 15-20.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1983__17_1_15_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 17, n° 1, février 1983, p. 15 à 20)

COMPARAISON EXPÉRIMENTALE D'ALGORITHMES POUR LES PROBLÈMES DE RECOUVREMENT ET DE MAXIMISATION D'UNE FONCTION PSEUDO-BOOLÉENNE (*)

par Alain BILLIONNET et Isabelle CARADOT [1]

Résumé. — *Nous comparons, pour deux problèmes importants de recherche opérationnelle, le problème de recouvrement et le problème de l'optimisation d'une fonction pseudo-booléenne non linéaire sans contrainte, les temps d'exécution que nécessite, d'une part, leur résolution directe et, d'autre part, leur résolution après certaines transformations.*

Mots clés : problème de recouvrement; fonction pseudo-booléenne; ensemble stable.

Abstract. — *We compare for two important problems of operations research, the set covering problem and the problem of optimizing an unconstrained and non linear pseudo-boolean function, the execution times required by their direct solution and those required by their solution after some transformations.*

Keywords: set covering problem; pseudo-boolean function; stable set.

1. INTRODUCTION

Nous nous proposons, dans cet article, d'étudier certaines transformations qui permettent de passer d'un problème d'optimisation à un autre. Nous comparons, pour deux problèmes importants de recherche opérationnelle, le problème de recouvrement [4] et le problème de l'optimisation d'une fonction pseudo-booléenne non linéaire, sans contrainte [6, 7] leur résolution directe et leur résolution après certaines transformations.

Le problème de recouvrement se pose de la façon suivante :

$$\text{minimiser } z = cx$$
$$\text{avec A } x \geqq e$$
$$x_j = 0 \text{ ou } 1$$

(*) Reçu décembre 1981.
[1] Institut d'Informatique d'Entreprise, Conservatoire national des Arts et Métiers, 292, rue Saint-Martin, 75141 Paris Cedex 03.

où $A=(a_{ij})$ est une matrice $m\times n$ donnée et telle que $a_{ij}=0$ ou 1; e, un vecteur $m\times 1$ dont toutes les composantes sont égales à 1; c, un vecteur $n\times 1$ à coefficients positifs connus; x, le vecteur $n\times 1$ des inconnues x_j.

Rappelons qu'une fonction pseudo-booléenne est une fonction à valeurs réelles de variables bivalentes qui peut toujours s'écrire:

$$f(y_1,\ldots,y_r)=\sum_{k=1}^{p} b_k \prod_{j\in N_k} \tilde{y}_j+K,$$

où b_k est un nombre réel; $\tilde{y}_j$, la variable y_j sous sa forme directe ou complémentée; N_k, l'ensemble des indices des variables qui apparaissent dans le k-ième monôme; K, une constante.

Le problème de la maximisation de $f(y_1,\ldots,y_r)$ consiste donc à déterminer un vecteur $(y_1^*,\ldots,y_r^*)\in\{0,1\}^r$ tel que :

$$\forall (y_1,\ldots,y_r)\in\{0,1\}^r : f(y_1^*,\ldots,y_r^*)\geqq f(y_1,\ldots,y_r).$$

2. LES TRANSFORMATIONS

a. Dans [1] nous démontrons le résultat suivant (conséquence d'un théorème de P. L. Hammer, I. Rosenberg et S. Rudeanu [7]) qui permet de transformer le problème de recouvrement en un problème de minimisation d'une fonction pseudo-booléenne:

THÉORÈME 1 : *$x^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ est solution du problème de recouvrement si et seulement si x^* minimise la fonction pseudo-booléenne:*

$$z(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{m} \prod_{j\in J_i} \bar{x}_j+\varepsilon\, cx,$$

où:

$$J_i=\{j\mid a_{ij}=1\} \qquad et \qquad 0<\varepsilon<1/\sum_{j=1}^{n} c_j.$$

b. Dans [1] nous montrons que l'optimisation d'une fonction pseudo-booléenne non linéaire peut se poser comme la détermination d'un ensemble stable de poids maximal dans un graphe. En effet, le problème de l'optimisation de toute fonction pseudo-booléenne peut toujours se poser comme celui de la maximisation d'une fonction pseudo-booléenne $f(y_1,\ldots,y_r)$ à coefficients positifs :

$$f(y_1,\ldots,y_r)=\sum_{k=1}^{l} d_k \prod_{j\in N_k} \tilde{y}_j+R,$$

où d_k est un coefficient positif et R, une constante.

Considérons alors le graphe $G_f=(X, E)$ tel que:

$$X=\{1, \ldots, l\};$$

$$\forall i, j \in X, \quad [i, j] \in E \Leftrightarrow \forall (y_1, \ldots, y_r) \in \{0, 1\}^r,$$

$$\prod_{s \in N_i} \tilde{y}_s \times \prod_{s \in N_j} \tilde{y}_s = 0;$$

$$\forall k \in X, \quad \text{le poids du sommet } k \text{ est égal à } d_k.$$

THÉORÈME 2 : *Le maximum de $f(y_1, \ldots, y_r)$ est égal au poids d'un ensemble stable de poids maximal S du graphe $G_f=(X, E)$ augmenté de la constante R. Le vecteur qui maximise f est déterminé, d'une part, par le système d'équations suivant dont la solution unique est évidente :*

$$\forall k \in S, \quad \prod_{j \in N_k} \tilde{y}_j = 1$$

et, d'autre part, en attribuant indifféremment la valeur 0 *ou* 1 *aux variables dont la valeur n'est pas fixée par le système précédent.*

c. La méthode de I. Rosenberg [9] que nous utilisons pour optimiser une fonction pseudo-booléenne non linéaire opère sur une fonction où n'apparaissent pas de variables complémentées. Nous proposons donc la transformation suivante du problème de recouvrement : effectuons le changement de variables $y_j=\bar{x}_j$ dans la fonction associée. On obtient :

$$z(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j \in J_i} y_j - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} c_j.$$

Dans le cas de la fonction associée au problème de recouvrement la transformation est particulièrement simple. Si l'on doit transformer une fonction pseudo-booléenne quelconque on remplace $\bar{y}_i$ par $1-y_i$.

3. COMPARAISON ENTRE LES RÉSOLUTIONS DIRECTES ET LES RÉSOLUTIONS APRÈS TRANSFORMATION

Considérons tout d'abord le problème de recouvrement. Nous avons choisi, pour sa résolution directe, l'algorithme de M. Gondran et J. L. Laurière [5]. En ce qui concerne sa résolution après transformation, nous avons effectué les deux essais suivants :

— transformation du problème de recouvrement en minimisation d'une fonction pseudo-booléenne sans variable complémentée et application de l'algorithme de I. Rosenberg pour effectuer cette minimisation;

— transformation du problème de recouvrement en minimisation d'une fonction pseudo-booléenne à coefficients positifs puis en recherche d'un ensemble stable de poids maximal dans un graphe. La recherche de cet ensemble stable est effectué par l'algorithme présenté dans [3] qui est fondé sur différentes propriétés démontrées dans [2].

Les tableaux I et II présentent les résultats obtenus pour ces deux essais. Les problèmes de recouvrement considérés ont été engendrés « aléatoirement » en fonction des paramètres suivants : n (nombre de variables), m (nombre de contraintes), $n_{\min}$ (nombre minimal de variables par contrainte), $n_{\max}$ (nombre maximal de variables par contrainte), $c_{\min}$ (valeur minimale des coefficients de la fonction économique), $c_{\max}$ (valeur maximale des coefficients de la fonction économique). Tous les détails de la procédure permettant d'engendrer les problèmes à partir de ces paramètres sont donnés dans [3]. Les temps d'exécution sont en seconde d'un I.B.M. 370/168.

TABLEAU I

– signifie : dépassement de la capacité mémoire.

n	m	$n_{\min}$	$n_{\max}$	$c_{\min}$	$c_{\max}$	Temps de résolution directe	Résolution après transformation	
							Temps de transformation	Temps d'exécution de l'algorithme de Rosenberg
10	5	2	6	1	10	1,06	0,30	>320
10	10	2	6	1	10	1,22	0,39	>320
20	10	2	10	1	15	1,48	0,34	–
50	30	4	11	1	50	2,68	0,58	–
50	60	4	11	1	50	10,62	0,73	–
100	10	4	18	1	50	1,24	0,54	–
200	20	5	30	1	60	3,87	1,11	–

Commentaires : la transformation du problème de recouvrement en minimisation d'une fonction pseudo-booléenne sans variable complémentée se fait rapidement mais l'algorithme de Rosenberg demande un temps d'exécution et une place en mémoire beaucoup trop importants.

TABLEAU II

Les problèmes des lignes 2, 3 et 4 sont ceux des lignes 4, 5 et 6 du tableau I

n	m	n_{min}	n_{max}	c_{min}	c_{max}	Temps de résolution directe	Temps de construction du graphe
50	20	4	11	1	50	2,57	9,28
50	30	4	11	1	50	2,68	7,03
50	60	4	11	1	50	10,62	6,28
100	10	4	18	1	50	1,24	9,54
100	15	4	18	1	50	1,49	13,06
100	20	4	18	1	50	2,25	8,10

Commentaires : nous voyons immédiatement que cette transformation ne sera pas intéressante puisque le temps de construction du graphe est beaucoup trop important par rapport au temps de résolution directe.

Les résultats précédents nous permettent de conclure que la résolution directe du problème de recouvrement est préférable à sa résolution après les deux transformations envisagées.

Considérons maintenant le problème de l'optimisation d'une fonction pseudo-booléenne. Nous comparons l'optimisation directe par l'algorithme de I. Rosenberg et la résolution par construction du graphe associé et recherche d'un ensemble stable de poids maximal dans ce graphe. Le tableau III présente les résultats obtenus pour la maximisation d'une fonction pseudo-booléenne engendrée « aléatoirement » à partir des paramètres suivants : N (nombre de variables), p (nombre de monômes), $p+$ (nombre de monômes à coefficient positif), $p-$ (nombre de monômes à coefficient négatif), b_{min} (valeur minimale du coefficient d'un monôme), b_{max} (valeur maximale du coefficient d'un monôme), N_{min} (nombre minimal de variables par monôme), N_{max} (nombre maximal de variables par monôme).

Commentaires : l'algorithme de I. Rosenberg n'est pas performant, tout au moins dans ces conditions d'expérimentation. Remarquons que le fait d'être obligé de travailler sur une fonction sans variable complémentée explique, en partie, les très mauvais résultats obtenus. En effet, d'une part, l'obtention d'une telle fonction, à partir d'une fonction quelconque, multiplie le nombre total de monômes (*voir* neuvième colonne du tableau III) et, d'autre part, dans la fonction obtenue, un grand nombre de monômes ont le même coefficient, ce qui est défavorable à l'algorithme de I. Rosenberg. En revanche, le passage par la détermination d'un ensemble stable de poids maximal dans un graphe donne de très bons résultats, particulièrement dans le cas de la maximisation

TABLEAU III

							Résolution directe			Résolution après transformation		
							Fonction sans $\bar{y}$		Temps de l'algorithme de Rosenberg			
N	$p+$	$p-$	$N_{\min}$	$N_{\max}$	$b_{\min}$	$b_{\max}$	Temps d'obtention	Nombre de monômes		Nombre de sommets du graphe	Temps de construction du graphe	Temps de recherche d'un ensemble stable optimal
5	3	2	1	5	1	15	0,46	34	53,32	12	0,30	1,31
10	1	4	1	5	1	15	0,46	16	>300	15	0,53	1,29
10	7	3	1	5	1	15	0,52	45	–	17	0,63	2,23
20	14	1	1	5	1	50	0,68	67	–	18	0,70	1,35
20	19	6	1	5	1	50	1,13	102	–	42	0,83	61,37
40	10	5	1	9	1	100	1,09	68	–	34	0,82	11,39
20	7	8	1	5	1	50	0,70	71	–	35	1,08	47,24
20	12	13	1	5	1	50	1,10	99	–	58	1,08	>150

d'une fonction dont la majorité des monômes ont un coefficient positif (ou de la minimisation d'une fonction dont la majorité des monômes ont un coefficient négatif).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BILLIONNET, *Méthode fondée sur la maximisation d'une fonction pseudo-booléenne pour la transformation du problème de recouvrement en problème de partitionnement.* Rapport de recherche de l'Institut d'Informatique d'Entreprise, janvier 1978.

[2] A. BILLIONNET, *Réductions et conditions d'optimalité dans le problème de l'ensemble stable de poids maximal,* R.A.I.R.O., vol. 15, n° 3, août 1981, p. 213 à 231.

[3] I. CARADOT et C. POTIEZ, *Étude des problèmes d'optimisation en variables bivalentes; réalisation d'algorithmes efficaces,* Mémoire d'Ingénieur de l'Institut d'Informatique d'Entreprise, 1980, Paris.

[4] R. S. GARFINKEL and G. L. NEMHAUSER, *Integer Programming,* chap. 8, John Wiley and Sons, 1972.

[5] M. GONDRAN et J. L. LAURIÈRE, *Un algorithme pour le problème de recouvrement,* R.A.I.R.O., vol. 9, n° 2, 1975, p. 33 à 51.

[6] F. GRANOT et P. L. HAMMER, *On the Use of Boolean Functions in* 0-1 *Programming,* Methods of Operations Research, Vol. 12, 1972, p. 154 à 184.

[7] P. L. HAMMER et S. RUDEANU, *Méthodes booléennes en recherche opérationnelle,* Dunod, Paris, 1970.

[8] P. L. HAMMER et U. N. PELED, *On the Maximisation of a Pseudo-Boolean Function* (*J. Ass. Computing Machinery*), Vol. 19, 1972, p. 265 à 282.

[9] I. G. ROSENBERG, *Minimisation of Pseudo-Boolean Functions by Binary Developments,* Discrete Mathematics, Vol. 7, 1974, p. 151 à 165.