Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

M. C. Costa

Une étude pratique de découpes de panneaux de bois

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 18, n° 3 (1984), p. 211-219.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1984__18_3_211_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 18, n° 3 août 1984, p. 211 à 219)

UNE ÉTUDE PRATIQUE DE DÉCOUPES DE PANNEAUX DE BOIS (*)

par M. C. COSTA (1)

Résumé. — *L'étude pratique présentée dans cet article a été menée dans une entreprise de meubles. Le problème posé était le suivant : comment découper des étagères de divers formats dans de grands panneaux de bois de dimensions données, de façon à obtenir, sinon une chute minimale, du moins une surface de chute ne dépassant pas* 10 % *de la surface du matériau utilisé ?*

Ce problème classique de Recherche Opérationnelle a donné lieu à de nombreux développements théoriques mais nous avons voulu insister ici sur les aspects concrets inhérents à toute étude en milieu industriel. Nous verrons par exemple que, bien qu'il s'agisse d'un problème de découpes à deux dimensions, l'existence de contraintes techniques très fortes réduit considérablement l'aspect combinatoire du problème. Cela nous a permis, après l'avoir formalisé — à l'aide de plans de coupe — comme un programme en variables bivalentes, d'en donner une solution par une méthode arborescente.

Notons que, grâce au programme mis au point, la société concernée économise effectivement en moyenne 5 *à* 10 % *de chutes par rapport à la solution manuelle utilisée auparavant.*

Mots clés : Découpes; programmation linéaire en nombres entiers; algorithme.

Abstract. — *In this paper, we propose a solution for a cutting problem in a furniture factory. In the cutting of shelves of various dimensions from standard wood boards, the objective is to minimize the total waste or to keep it at a low level.*

Many theorical studies have been developped about this classical subject of the operational research but we only present here the concrete aspect of an industrial case. For example we show how the existence of very restricting technical constraints considerably reduces the combinatorial aspect of this two-dimensional cutting problem. Consequently, it was possible to modelize it (using cutting patterns) as a 0-1 *linear program, and to solve it by a depthfirst treesearch method. This has allowed an average economy of* 5 *to* 10% *of the scrap waste, compared with the former manual solution.*

Keywords: Cutting problem; integer linear programming; algorithm.

INTRODUCTION

La société « Surfaces » vend des bibliothèques en « Kit » (éléments séparés); elle commande les étagères à l'entreprise M qui les découpe dans des panneaux de pin de largeur et longueur données et constantes ($L_1 \times L_2$).

(*) Reçu décembre 1982.
(1) Conservatoire National des Arts et Métiers, 292, rue Saint-Martin, 75141 Paris Cedex 03.

Les chutes lui étant facturées, c'est « Surfaces » qui doit indiquer les découpes à effectuer, tout en tenant compte des contraintes techniques importantes imposées par la machine perfectionnée qu'utilise M.

Nous présentons ici la méthode mise au point pour déterminer ces découpes de façon à satisfaire aux besoins de « Surfaces » tout en ayant un niveau de chute « acceptable » (ici inférieur ou égal à 15%).

1. PRÉSENTATION DE LA MACHINE

La machine comporte une série de scies découpant les panneaux longitudinalement, et deux séries de scies transversales. Une pile de 50 panneaux (au plus) est placée sur la machine qui les fait alors glisser vers les scies; (en fait on ne découpera pas moins de 50 panneaux car le temps de réglage des scies est très important). Aucune manipulation extérieure n'intervient avant la fin des découpes qui sont effectuées de bout en bout (découpe guillotine).

Une première découpe longitudinale est effectuée; les « bandes » obtenues sont ensuite séparées en deux paquets; une deuxième découpe, transversale, est effectuée sur l'un, et enfin une troisième sur l'autre (*cf.* fig. 1). Les rectangles obtenus sont ensuite triés par un manutentionnaire.

Nous appellerons « *plan de coupe* » les différentes façons de découper un panneau, qui respectent les contraintes ci-dessus ainsi que l'orientation des rectangles imposée par le sens du bois (*voir* § 2), et fournissent des rectangles de dimensions commandées; soit J le nombre de ces plans de coupe. Il faut noter également que chaque scie utilise une largeur de 3 mm de bois et qu'il est impossible de découper à moins de 5 mm du bord d'un panneau.

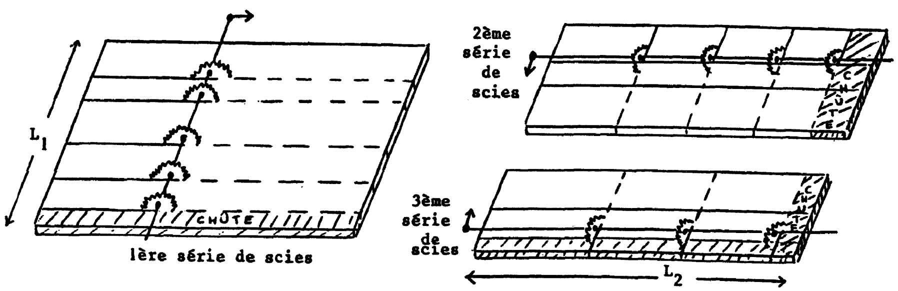

Figure 1.

2. ÉTUDE DE LA COMMANDE

Surfaces commande régulièrement des découpes de P panneaux. P doit être un multiple de 50 car il y a 50 panneaux par pile sciée. Une étude statistique des ventes précédentes, de la composition des meubles par la clientèle et du stock permet aux responsables de fixer les proportions $p_i (i=1, \ldots, N)$ nécessaires de chaque type i de « rectangles » (ou étagères) de dimension $l_i \times l'_i$ (*voir* exemple § 7. 1).

Ces proportions ne sont pas impératives car les rectangles en surnombre pourront être utilisés ultérieurement. C'est pourquoi nous avons imposé le respect des proportions pour environ (1) 85% de la surface totale découpée en calculant (2) les nombres minimaux, $n_i (i=1, \ldots, N)$, de rectangles i à obtenir (*voir* 7.2 *a*).

Les rectangles supplémentaires fournis diminueront la chute, les proportions souhaitées n'étant plus tout à fait respectées.

Ajoutons, de plus, que, pour des raisons esthétiques, certaines découpes devront tenir compte du sens du fil du bois.

3. FORMALISATION DU PROBLÈME

Les panneaux sont sciés par séries de 50 : on pourra ramener l'étude des découpes de P panneaux à celle de Nc panneaux ($Nc = P/50$) car on ne peut utiliser que Nc *plans de coupe différents.* La valeur de P est généralement de 200 panneaux par commande de notre société; même si P s'élevait à 400 ou 500 la valeur de Nc resterait faible. Le nombre de rectangles i à obtenir n'est plus n_i mais $[n_i/50]$ et les résultats obtenus seront multipliés par 50.

Soient n_{ij} les nombres de rectangles i obtenus par la découpe j d'un panneau, $i=1, \ldots, N$ et $j=1, \ldots, J$. Nous cherchons les Nc plans de coupe à retenir, soit, pour tout j ($j=1, \ldots, J$), les valeurs de x_j telles que :

---

(1) A cause des arrondis. 15% est le niveau de chute acceptable.

(2) Fixons $\sum_i n_i . l_i . l'_i = L_1 . L_2 . P . 0{,}85$; c'est-à-dire : surface totale minimale des rectangles obtenus égale 85% de la surface totale des panneaux découpés. Pour que les proportions demandées soient respectées, pour tout i, il faut avoir $n_i = K . p_i$ où K est une constante. Pour trouver les valeurs de n_i, il suffira donc de calculer $K = L_1 . L_2 . P . 0{,}85 / \sum_i p_i . l_i . l'_i$.

De plus, n_i ne peut être qu'entier; on posera donc $n_i = [K p_i]$ ([x] désigne l'entier immédiatement supérieur ou égal à x).

retenir, soit, pour tout j ($j=1, \ldots, J$), les valeurs de x_j telles que :

$$PLN1 \left| \begin{array}{l} - \ x_j \text{ entier positif.} \\ - \ \sum_{j=1}^{J} x_j \leqq Nc. \\ - \ \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \cdot x_j \geqq \left\lceil \frac{n_i}{50} \right\rceil \text{ pour tout } i=1, \ldots, N. \\ - \ \text{Les contraintes techniques sont respectées.} \\ - \ \text{La chute obtenue est minimale :} \\ \qquad [\text{MIN}]\ Nc \cdot L_1 \cdot L_2 - \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{N} x_j \cdot n_{ij} \cdot l_i \cdot l'_i . \end{array} \right.$$

4. ÉTUDE DES CONTRAINTES TECHNIQUES : RECHERCHE DES PLANS DE COUPE

Pour tenir compte de l'épaisseur des scies, nous ajouterons dès le début 3 mm à chaque longueur et largeur, en prenant garde d'accepter ensuite une découpe dépassant exactement de 3 mm la longueur découpée (cas où il n'y a pas de chute). De plus, toute découpe conduisant à une chute non nulle et inférieure à 5 mm sera éliminée.

Dans les problèmes généraux de découpes (linéaires ou, *a fortiori* à 2 dimensions), il est impossible de déterminer tous les plans de coupe [1, 7, 9, 10, . . .]; ici, en revanche, grace aux contraintes techniques très importantes, on pourra facilement en dresser une liste; leur nombre varie de 50 à 100 dans les cas réels (petits) posés par Surfaces.

Nous étudierons tout d'abord la première découpe longitudinale, puis les deux découpes transversales avant de combiner les trois découpes (*voir* 7.2*b*). Après plusieurs tests, afin d'éliminer les plans de coupe inintéressants, nous avons borné à 10% la chute latérale consécutive à la première découpe, et à 4% (de la surface d'un panneau) celle obtenue sur chaque bande. Ces pourcentages nous donnerons, pour chaque découpe, une longueur de chute maximale autorisée. Remarquons d'autre part, qu'il est tout à fait raisonnable de borner (par exemple à 3) le nombre de fois où une même largeur apparaît dans une découpe : le temps de réglage des scies est tel qu'il est préférable d'essayer de conserver une même largeur dans différents plans de coupe; de plus, ce sont les petites dimensions qui pourraient être obtenues plus de trois fois alors que ce sont elles qui apparaissent déjà le plus souvent dans les combinaisons admissibles.

Après avoir établi la liste ordonnée (décroissante) des largeurs possibles des bandes, une exploration arborescente nous permettra d'établir toutes les premières combinaisons de découpes acceptables selon les critères précédents (dans L_1) (*voir* 7.2*b*).

Pour chaque largeur de bande, nous dresserons de même la liste des longueurs de rectangles pouvant lui être associée et établirons les combinaisons de découpes acceptables dans L_2.

Enfin, nous combinerons les découpes de L_1 avec celles de L_2 afin d'obtenir tous les plans de coupe admissibles (c'est-à-dire ne comportant pas plus de deux découpes différentes dans L_2).

Pour chaque plan de coupe j ($j=1, \ldots, J$) nous calculerons n_{ij} ($i=1, \ldots, N$) le nombre de rectangles i obtenus et c_j le pourcentage de chute associé (*voir* 7.2*c*).

5. CHOIX DES Nc PLANS DE COUPE DE PANNEAUX

Ces Nc plans de coupe doivent permettre de satisfaire à la demande (ramenée à Nc panneaux), tout en donnant un minimum de chute.

La quatrième contrainte du *PLN* 1 donné au § 3 ayant été prise en compte, il reste à résoudre maintenant :

$$PLN2 \quad \boxed{\begin{array}{l} x_j \text{ entier positif pour tout } j=1, \ldots, J. \\ \sum_{j=1}^{J} x_j \leq Nc. \\ \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \cdot x_j \geq \left\lceil \dfrac{n_i}{50} \right\rceil \text{ pour } i=1, \ldots, N. \\ [\mathrm{MIN}] \sum_{j=1}^{J} x_j \cdot c_j . \end{array}}$$

Il est facile d'utiliser, par exemple, une méthode inspirée de celle de Faure et Malgrange [6] (décomposition en variables bivalentes, puis méthode arborescente PSES) pour résoudre le problème (*voir* 7.2*d*).

Remarquons que dans le cas de problèmes de grande taille où le nombre de panneaux de chaque série ne serait pas fixé à 50, ($\sum x_j \nleqq Nc$), on pourrait trouver une solution approchée de ce *PLNE* en relachant les contraintes d'intégrité et appliquant l'algorithme du simplexe.

Il peut arriver que le programme ainsi posé n'admette pas de solution : il faut alors reprendre le problème en augmentant le pourcentage de chute accepté.

6. CONCLUSION

Le programme informatique que nous avons mis au point comporte environ six cents instructions Fortran. Son utilisation est très simple et a effectivement permis à la société Surfaces d'économiser souvent plus de 5% de chutes. Actuellement les calculs se font en 15 à 20 secondes (suivant les données) sur un IBM 370/168, mais le programme doit prochainement être adapté à un microordinateur.

Bien qu'il s'agisse d'un problème de découpes à deux dimensions, les contraintes techniques très particulières réduisant considérablement la taille du problème (nombre total réduit de plans de coupe, limitation à Nc du nombre des plans de coupe à retenir), nous ont permis de résoudre à l'aide de méthodes habituellement réservées aux découpes linéaires (méthodes de plans de coupe, méthode arborescente de PLO 1 ou simplexe). En fait on pourrait imaginer assez facilement quelques modifications permettant à l'algorithme de traiter d'autres problèmes à deux dimensions n'autorisant que deux ou trois découpes successives, problèmes que l'on rencontre fréquemment dans la pratique.

7. TRAITEMENT D'UN PETIT CAS RÉEL

7.1. **Les données** (fournies à chaque commande par Surfaces).

Dimension d'un panneau : $L_1 \times L_2 = 1\,220 \times 2\,500$.

Pourcentage de chute accepté : 15%.

Nombre de panneaux à découper : 200.

Commande :

N°	Dimensions $l_i \times l'_i$	Sens	Proportion p_i
1	420 × 800	1	1
2	420 × 300	0	4
3	420 × 205	1	1

N°	$l_i \times l'_i$	Sens	p_i
4	300 × 600	1	4
5	300 × 205	0	8
6	205 × 800	1	3

Un 1 dans la colonne « sens » signifie que le rectangle doit être coupé dans le sens du fil du bois (l'_i doit être mesurée dans L_2). La colonne proportion indique que pour 1 rectangle n° 1, il faut obtenir 4 rectangles n° 2, 1 n° 3, etc.

Les dimensions indiquées ici tiennent compte de l'épaisseur des scies.

7.2. Résolution

(*a*) Commande :

$$K = L_1 . L_2 . 200.0{,}85 / \sum_i P_i . l_i . l'_i = 197{,}14.$$

Nombre de rectangles à fournir : $n_i = [K . p_i]$.

i	1	2	3	4	5	6
n_i	198	789	198	789	1 578	592
$\left\lceil \frac{n_i}{50} \right\rceil$	4	16	4	16	32	12

(*b*) Recherche des plans de coupe :

– largeurs des bandes à découper dans L_1 : 420, 300, 205.

Il y a 4 découpes acceptables dans L_1 (première série de scies).

Exemple :

1. 420-420-300, chute : 6,56 % (celle retenue *fig.* 2);
2. 420-300-205-205, chute : 7,38 %, etc.;

– longueurs possibles des rectangles de largeur 420 : 800, 300, 205.

Il y a alors 6 découpes de L_2.

Exemple :

5. 800-800-800, chute : 1,38 % . . .;
8. 800-800-300-205-205, etc.

– Il y a ensuite 6 découpes possibles des bandes de largeur 300 et 2 de celles de largeurs 205.

Exemple : 13. 600-600-420-420-205-205, etc.

Un plan de coupe de panneau sera donné par une découpe de L_1 et deux découpes différentes (2^e^ et 3^e^ séries de scies) des bandes obtenues.

Par exemple : le plan de coupe représenté figure 2 sera obtenu par la découpe n° 1 de L_1, puis la découpe n° 8 des 2 bandes de largeur 420 et la découpe n° 13 de la bande de largeur 300.

(*c*) Production des plans de coupe :

n_j	j/i	1	2	3	4	5	6	c_j
	1	6	1	0	3	1	0	10,05
	2	6	0	0	3	3	0	10,15
	.	.	.	.	.	.	.	.
	22	4	4	4	2	2	0	12,28
	.	.	.	.	.	.	.	.
	56	0	6	0	6	9	2	10,90
	.	.	.	.	.	.	.	.
	66	0	6	0	4	9	6	1,20
	.	.	.	.	.	.	.	.
	68	0	4	0	4	13	6	1,39
	.	.	.	.	.	.	.	.
	72	0	6	0	2	15	6	2,90

(*d*) $PLN2$ est déduit du tableau ci-dessus (colonne par colonne) :

$$6x_1+6x_2+\ldots+4x_{22}+\ldots+0x_{72}\geqq 4,$$
$$x_1+\ldots+4x_{22}+\ldots+6x_{72}\geqq 19,$$

on trouve ainsi 6 inéquations auxquelles il faut ajouter $\sum_j x_j \leqq 4$.

La fonction économique s'écrit :

$$[\text{MIN}]\ Z=10{,}05\,x_1+10{,}15\,x_2+\ldots+12{,}28\,x_{22}+\ldots$$
$$+1{,}2\,x_{66}+\ldots+1{,}39\,x_{68}+\ldots+2{,}9\,x_{72}.$$

En fait, aucune solution ne peut être trouvée en utilisant quatre fois le même plan de coupe, ni même sans doute trois fois. Il est donc tout à fait raisonnable de borner x_j à 3 pour tout j et de transformer $PLN2$ en un programme en variables bivalentes en posant $x_j=2\,y_j+z_j$ pour tout $j=1,\ldots,J$.

La solution obtenue retient finalement pour chaque série de 50 panneaux, les quatre plans de coupe numéros 22, 56, 66 et 68.

Par exemple, 50 panneaux seront découpés selon le schéma suivant correspondant au plan de coupe n° 22 :

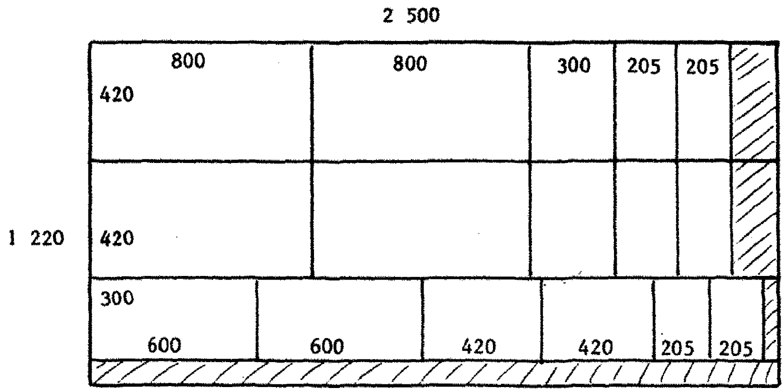

Figure 2.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. ADAMOWICZ et A. ALBANO, *An Algorithm for the Solution of the Template Layout Problems*, Automazione e Strumentazione (Italie), vol. 22, n° 3, mars 1974, p. 123-133.
2. N. CHRISTOFIDES et C. WHITLOCK, *An Algorithm for 2 Dimensional Cutting Problems*, Operations Research, vol. 25, n° 1, 1977, p. 30-44.
3. M. C. COSTA, *Problèmes de découpes linéaires-formalisation et solutions économiques*, Thèse de 3^e cycle, Paris-VI, 1980, 228 p.
4. M. C. COSTA, *Formalisation et résolution des problèmes de découpes linéaires*, R.A.I.R.O., vol. 16, n° 1, février 1982, p. 65-82.
5. R. G. DYSON et A. S. GREGORY, *The Cutting Stock Problem in the Flat Glass Industry*, Operational Research Quart., vol. 25, n° 1, 1974, p. 41-54.
6. R. FAURE et Y. MALGRANGE, *Une méthode pour résoudre les programmes linéaires en nombres entiers*, Gestion 3, avril 1963, p. 48-56.
7. P. C. GILMORE et R. E. GOMORY, *A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem*, Operations Research, vol. 9, 1961, p. 849-859.
8. P. C. GILMORE et R. E. GOMORY, *Multistage Cutting Stock Problem of Two and More Dimensions*, Operations Research, vol. 13, 1965, p. 94-120.
9. P. C. GILMORE, *Cutting Stock, Linear Programming, Knapsacking, Dynamic Programming, Some Interconnections, Annals of Discrete Mathematics 4, Discrete optimization*, tome 1, HAMMER, JOHNSON et KORTE, éd., North-Holland, 1979, p. 217-235.
10. R. W. HAESSLER, *Solving the Two-Stage Cutting Stock Problem*, Omega (G.B.), vol. 7, n° 2, novembre 1979, p. 145-151.
11. J. C. HERZ, *A Recurse Computationnal Procedure for Two Dimensional Stock Cutting*, IBM journal of research and development, vol. 16, n° 5, 1972, p. 462-469.
12. G. MOREAU, *Méthodes pour la résolution des problèmes d'optimisation de découpe*, Thèse de docteur-ingénieur, Université Claude-Bernard, Lyon, 1973.