Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

K. Zaras

Dominances stochastiques pour deux classes de fonctions d'utilité : concaves et convexes

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 23, nº 1 (1989), p. 57-65.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1989__23_1_57_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 23, n° 1, 1989, p. 57 à 65)

DOMINANCES STOCHASTIQUES POUR DEUX CLASSES DE FONCTIONS D'UTILITÉ : CONCAVES ET CONVEXES (*)

par K. ZARAS ([1])

Résumé. — *On admet deux situations possibles par rapport à un attribut : un décideur a soit de l'aversion, soit du goût pour le risque — dépendant du fait que la fonction d'utilité est continue et concave ou continue et convexe. L'objectif de cet article est de développer la notation des dominances stochastiques de troisième degré, complémentaires pour deux classes de fonctions d'utilité.*

Mots clés : Fonction d'utilité concave; Fonction d'utilité convexe; Dominance stochastique inverse; Dominance stochastique généralisée; Dominance stochastique de troisième degré.

Abstract. — *One can admit two possible situations in relation to the attibute: a decision maker has either aversion or preference to take a risk — depending on whether the utility function is continuous and concave or continuous and convex. The objective of this paper is to develop the notions of third stochastic complementary dominances for both utility functions classes.*

Keywords : Concave utility function; Convex utility function; Stochastic inverse dominance; Stochastic general dominance; Third-degree stochastic dominance.

1. INTRODUCTION

Les études expérimentales (*voir* Fishburn et Kochenberger [2], Kahneman et Tversky [4]) démontrent que les perspectives aléatoires ne sont pas évaluées par les hommes en terme de valeurs finales de l'attribut, mais comme des gains et des pertes par rapport au point de référence. De plus, les homme ont tendance à l'aversion pour le risque par rapport aux gains et à la préférence pour le risque par rapport aux pertes. Ces études confirment qu'une combinaison convexe-concave de la fonction d'utilité est prédominante dans le comportement des individus. Pour cette raison, cet article a pour but

(*) Reçu avril 1988.
([1]) GERAD, HEC, 5255, avenue Decelles, Montréal, Qc, Canada H3T 1V6.

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/89/01 57 09/$ 2.90

de développer la notion de domainances stochastiques pour deux classes de fonctions d'utilité : concaves et convexes.

2. FORMULATION DU PROBLÈME

Soit $f_i(x)$, $F_i(x)$ *et* $\bar{F}_i(x)$ qui désignent respectivement une fonction de probabilité, des fonctions de probabilité cumulées, l'une ascendante et l'autre descendante. Une perspective aléatoire a_i est une perspective d'action permettant d'atteindre une conséquence inférieure ou égale à x avec la probabilité $F_i(x)$.

Le problème considéré est un problème de choix entre deux perspectives dans l'intervalle fermé :

$$[x_{1_r}, x_{2_r}] \subseteq [a, b] \quad \text{où} \quad r \in (i, j) \quad \text{et} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

On suppose que la fonction de préférence est l'utilité espérée exprimée sous la forme :

$$E_i[\varphi(x)] = \int_a^b \varphi(x)\, dF_i(x) \tag{2}$$

On admet que l'existence de deux classes de fonctions d'utilité $\varphi(x)$, concaves et convexes (croissantes, continues et trois fois différentiables dans l'intervalle $[a, b]$) est possible. Nous allons considérer six types de dominances stochastiques, à savoir, *FSD* (Première Dominance Stochastique), *SSD* (Seconde Dominance Stochastique), *SSID* (Seconde Dominance Stochastique Inverse), *TSD* (Troisième Dominance Stochastique), *TSID* 1 (Troisième Dominance Stochastique Inverse, Première Espèce), et *TSID* 2 (Troisième Dominance Stochastique Inverse, Seconde Espèce), qu'on note ici à l'aide de leur sigle anglais. Ces dominances stochastiques sont définies de façon suivante :

DÉFINITION 1 :

$$F_i FSD F_j \quad \text{si et seulement si} \quad F_i \neq F_j$$

et $H_1(x) = F_i(x) - F_j(x) \leqq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

DÉFINITION 2 :

$$F_i SSD F_j \quad \text{si et seulement si} \quad F_i \neq F_j$$

et $H_2(x)=\int_a^x H_1(y)\,dy \leqq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

DÉFINITION 3 :

$$\bar{F}_i\, SSID\, \bar{F}_j \quad \text{si et seulement si} \quad \bar{F}_i \neq \bar{F}_j$$

et $\bar{H}_2(x)=\int_x^b \bar{F}_i(y)-\bar{F}_j(y)\,dy \geqq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

DÉFINITION 4 :

$$F_i\, TSD\, F_j \quad \text{si et seulement si} \quad F_i \neq F_j$$

et $H_3(x)=\int_a^x H_2(y)\,dy \leqq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

DÉFINITION 5 :

$$\bar{F}_i\, TSID\, 1\, \bar{F}_j \quad \text{si et seulement si} \quad \bar{F}_i \neq \bar{F}_j$$

et $\hat{H}_3(x)=\int_a^x \bar{H}_2(y)\,dy \geqq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

DÉFINITION 6 :

$$\bar{F}_i\, TSID\, 2\, \bar{F}_j \quad \text{si et seulement si} \quad \bar{F}_i \neq \bar{F}_j$$

et $\bar{H}_3(x)=\int_x^b \bar{H}_2(y)\,dy \geqq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

Les relations entre ces dominances stochastiques sont, par définition, les suivantes :

– *TSD* est plus générale que *FSD* et *SSD*, ce qu'on note :

$$FSD \subseteqq SSD \subseteqq TSD$$

– si $\mu(F_i) \neq \mu(F_j)$ et non *FSD*, la dominance *SSID* est complémentaire à *SSD*, de telle façon qu'elle vérifie :

$$SSD \cup SSID = SSDR$$

et

$$SSD \cap SSID = \varnothing$$

où *SSDR* désigne une dominance stochastique généralisée de second degré.

— *TSID* 1 ou *TSID* 2 est plus générale que *FSD* et *SSID*, ce qu'on note :

$$FSD \subseteqq SSID \subseteqq \begin{cases} TSID\,1 \\ TSID\,2 \end{cases}$$

— si $\mu(F_i) \neq \mu(F_j)$ et non *SSID*, les dominances stochastiques *TSD*, *TSID* 1 et *TSID* 2 sont complémentaires de telle façon qu'elles vérifient :

$$TSD \cup TSID\,1 \cup TSID\,2 = TSDR$$
$$\text{et } TSD \cap TSID\,1 \cap TSID\,2 = \varnothing$$

où *TSDR* désigne une dominance stochastique généralisée de troisième degré.

3. RÈGLES DU CHOIX ENTRE DEUX PERSPECTIVES a_i ET a_j POUR UNE CLASSE DE FONCTIONS D'UTILITÉ CONCAVES

Dans ce cas-là, considérons une classe de fonctions d'utilité concaves où l'aversion absolue pour le risque est une fonction non-croissante de x.

$$U_3^1 = \{ \varphi(x) / \varphi_1(x) > 0,\ \varphi_2(x) \leqq 0,\ \varphi_3(x) \geqq 0,\ \forall x \in [a, b] \}$$

où $\varphi_1(x) \cdot \varphi_3(x) \geqq (\varphi_2(x))^2$.

Pour cette classe de fonctions d'utilité on démontre :

Théorème 1 (Whitmore [1970]) : *Si*

$$\mu(F_i) \geqq \mu(F_j) \quad \textit{et} \quad H_3(x) \leqq 0 \quad \textit{pour tout} \quad x \in [a, b]$$

alors

$$E_i(x) - E_j(x) \geqq 0 \quad \textit{pour tout} \quad \varphi(x) \in U_3^1.$$

4. RÈGLES DU CHOIX ENTRE DEUX PERSPECTIVES a_i ET a_j POUR UNE CLASSE DE FONCTIONS D'UTILITÉ CONVEXES

Dans ce cas-là, dans un premier temps, considérons une classe de fonctions d'utilité convexes :

$$U_3^{21} = \{ \varphi(x) / \varphi_1(x) > 0,\ \varphi_2(x) \geqq 0,\ \varphi_3(x) \leqq 0,\ \forall x \in [a, b] \}$$

Pour cette classe de fonctions d'utilité on démontre :

Théorème 2 (*voir* Annexe) : *Si*

$$\mu(\bar{F}_i) \geqq \mu(\bar{F}_j) \quad \textit{et} \quad \hat{H}_3(x) \geqq 0 \quad \textit{pour tout} \quad x \in [a, b]$$

alors

$$E_i(x)-E_j(x)\geqq 0 \quad pour\ tout \quad \varphi(x)\in U_3^{21}.$$

Ce théorème permet de déterminer une préférence dans la situation intuitivement évidente (voir *fig.*) lorsque deux fonctions F_i et F_j se croisent deux fois et la dominance *TSD* ne peut être appliquée.

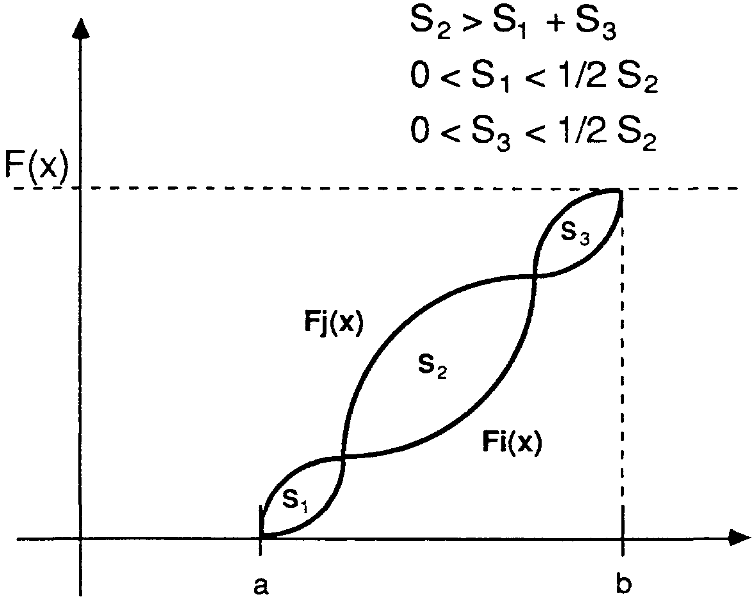

Figure. — Cas de la dominance stochastique *TSID* 1.

Dans un deuxième temps, considérons une classe de fonctions d'utilité convexes :

$$U_3^2=\{\varphi(x)/\varphi_1(x)>0,\ \varphi_2(x)\geqq 0,\ \varphi_3(x)\geqq 0,\ \forall x\in[a, b]\}$$

où $\varphi_1(x).\varphi_3(x)\leqq(\varphi_2(x))^2$.

Pour cette classe de fonctions d'utilité on démontre :

THÉORÈME 3 (*voir* Annexe) : *Si*

$$\mu(\bar{F}_i)\geqq\mu(\bar{F}_j) \quad et\ \bar{H}_3(x)\geqq 0 \quad pour\ tout\ x\in[a, b]$$

alors

$$E_i(x)-E_j(x)\geqq 0 \quad pour\ tout \quad \varphi(x)\in U_3^2.$$

Les théorèmes 2 et 3 concernent le cas où l'aversion absolue pour le risque $(-\varphi_2(x)/\varphi_1(x))$ est une fonction négative et non-décroissante de x.

CONCLUSION

Cet article a eu pour but de développer la notion de dominances stochastiques pour deux classes de fonctions d'utilité : concaves et convexes. On a présenté les théorèmes concernant le choix entre deux distributions $f_i(x)$ et $f_j(x)$ qui représentent deux perspectives aléatoires a_i et a_j respectivement. On a démontré les théorèmes 2 et 3 pour donner l'ensemble des règles complémentaires de dominances stochastiques de troisième degré.

Admettant deux classes de fonctions d'utilité, on peut poser des questions concernant la modélisation des préférences dans le cas où la dominance stochastique *TSID* 1 et *TSID* 2 se réalisent dans une partie concave de la fonction d'utilité et inversement dans le cas où les dominances stochastiques *TSD* se réalisent dans une partie convexe de la fonction d'utilité. On peut démontrer que dans ces cas, deux préférences opposées sont possibles et que tout dépend de la relation entre la valeur de l'aversion locale pour le risque, de la position relative des masses de probabilité et de la courbure de la fonction d'utilité (*voir* [7]). Dans ces cas il faut étudier la sensibilité des individus face au risque, car la violation de l'Axiome d'Indépendance est possible (Paradox d'Allais).

ANNEXE

Théorème 2 : *Si*

$$\mu(F_i) \geqq \mu(F_j) \quad et \quad \hat{H}_3(x) \geqq 0 \quad pour\ tout\ x \in [a, b]$$

alors

$$E_i(x) - E_j(x) \geqq 0 \quad pour\ tout\ \varphi(x) \in U_3^{21}$$

Démonstration : La différence entre les valeurs d'utilité est égale :

$$E_i - E_j = \int_a^b \varphi(x) . H_1(x)\, dx$$

En intégrant par partie, on a :

$$E_i - E_j = -\int_a^b \varphi_1(x) H_1(x)\, dx = \int_a^b \varphi_1(x) \bar{H}_1(x)\, dx$$

où

$$H_1(x) = -(\bar{F}_i(x) - \bar{F}_j(x)) = -\bar{H}_i(x)$$

En continuant l'intégration par parties, on a :

$$E_i - E_j = H_2^1(b)\, \varphi_1(b) - \int_a^x \varphi_2(x) H_2^1(x)\, dx$$

où

$$H_2^1(x) = \int_a^x (\bar{F}_i(x) - \bar{F}_j(x))\, dx$$

$$\bar{H}_2(x) = \int_x^b (\bar{F}_i(x) - \bar{F}_j(x))\, dx$$

sachant que

$$H_2^1(x) = -(\bar{H}_2(x) - \bar{H}_2(a))$$

et que

$$H_2^1(b) = \bar{H}_2(a)$$

on a

$$E_i - E_j = H_2^1(b)\, \varphi_1(b) + \int_a^b \varphi_2(x)(\bar{H}_2(x) - \bar{H}_2(a))\, dx$$

$$E_i - E_j = \bar{H}_2(a)\, \varphi_1(a) + \int_a^b \varphi_2(x) . \bar{H}_2(x)\, dx \quad (voir\ 7]).$$

En continuant encore l'intégration par parties, cette fois on a :

$$E_i - E_j = \bar{H}_2(a)\, \varphi_1(a) + \hat{H}_3(b)\, \varphi_2(b) - \int_a^b \varphi_3(x) \hat{H}_3(x)\, dx$$

où

$$\hat{H}_3(x)=\int_a^x \bar{H}_2(x)\,dx$$

Par définition $\varphi_1(x)>0$, $\varphi_2(x)\geqq 0$ et $\varphi_3(x)\leqq 0$ donc si $\hat{H}_3(x)\geqq 0$ pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$ et $\mu_i(\bar{F}_i)>\mu(\bar{F}_j)\rightarrow \bar{H}_2(a)\geqq 0$ démontre le théorème 2.

Q.E.D.

THÉORÈME 3 : *Si*

$$\mu(\bar{F}_i)\geqq\mu(\bar{F}_j)\quad et\quad \bar{H}_3(x)\geqq 0\quad pour\ tout\ x\in[a, b]$$

alors

$$E_i(x)-E_j(x)\geqq 0\quad pour\ tout\ \varphi(x)\in U_3^2.$$

En continuant la démonstration du théorème 2, on a :

$$E_i(x)-E_j(x)=\bar{H}_2(a)\,\varphi_1(a)+\hat{H}_3(b)\,\varphi_2(b)-\int_a^b \varphi_3(x)\,\hat{H}_3(x)\,dx$$

où

$$\hat{H}_3(x)=\int_a^x \bar{H}_2(x)\,dx$$

par définition

$$\bar{H}_3(x)=\int_x^b \bar{H}_2(x)\,dx$$

sachant que

$$\hat{H}_3(x)=-(\bar{H}_3(x)-\bar{H}_3(a))$$

on a :

$$E_i(x)-E_j(x)=\bar{H}_2(a)\,\varphi_1(a)+\hat{H}_3(b)\,\varphi_2(b)$$
$$-\bar{H}_3(a)\,\varphi_2(b)+\bar{H}_3(a)\,\varphi_2(a)+\int_a^b \varphi_3(x)\,\bar{H}_3(x)$$

si

$$\bar{H}_3(a)=\hat{H}_3(b)$$

on a alors :

$$E_i(x)-E_j(x)=\bar{H}_2(a)\,\varphi_1(a)+\bar{H}_3(a)\,\varphi_2(a)+\int_a^b \varphi_3(x)\,\bar{H}_3(x)\,dx$$

par la suite pour une classe U_3^2 on a :

$$E_i(x)-E_j(x)\geqq 0$$

si $\bar{H}_3(x)\geqq 0$ pour tout x dans $[a, b]$ et $\mu(\bar{F}_i)\geqq\mu(\bar{F}_j)\rightarrow\bar{H}_2(a)\geqq 0$.

Q.E.D.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Allais, *Le comportement de l'homme rationnel devant le risque, critique des postulats et axiomes de l'école américaine*, Econometrica, (22), 1953.
2. P. C. Fishburn et Kochenberger, *Two Pieces Von Neumann-Morgerstern Utility Function*, Decision Science, (10), 1979.
3. J. Hadar et W. Russell, *Rules for Ordering Uncertain Prospect*, American Econ. Rev., (59), 1969.
4. D. Kahneman et A. Tversky, *Prospect Theory. An Analyse of Decision under Risk*, Econometrica, (47), 1979.
5. M. Shneeweiss, *Entscheidungskriterien bei Risiko*, Springer-Verlag, 1967.
6. G. A. Whitmore, *Third-degree Stochastic Dominance*, Amer. Econ. Rev., (60), 1970.
7. K. Zaras, *The Second Stochastic Inverse Dominance in Expected Utility Analysis*, Foundations of Control Engineering, vol. 12, n° 4, 1987.