REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

BUI DOAN KHANH

Un calcul numérique des différentes solutions d'un système d'équations non-linéaires

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 24, nº 2 (1990), p. 159-166.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1990__24_2_159_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 24, n° 2, 1990, p. 159 à 166)

UN CALCUL NUMÉRIQUE DES DIFFÉRENTES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS NON-LINÉAIRES (*)

par Bui Doan KHANH [1]

Résumé. – *Pour calculer numériquement les différentes solutions d'un système d'équations non linéaires, par homotopie nous ramenons notre problème à la résolution d'un système différentiel régulier, et au calcul des zéros d'une fonction réelle d'une variable réelle.*

Et nous utilisons la méthode de correction d'Hermite pour résoudre numériquement le système différentiel; par suite, nous obtenons les solutions approchées du système non linéaire.

Ensuite, en utilisant la méthode de Newton-Raphson, avec les solutions approchées comme valeurs initiales, nous obtenons les différentes solutions de notre problème non linéaire.

Abstract. – *For finding multiple solutions of simultaneous nonlinear equations, we present a homotopy method, based on integrating a regular differential equations. This differential system is solved by a predictor-corrector scheme, based on Hermite corrector formula; and we obtain the approximate solutions of the system of nonlinear equations.*

Then, with the approximate solutions as initial points, the method of Newton-Raphson gives multiple solutions of the system of nonlinear equations.

Keywords : Homotopy method, systems of nonlinear equations, numerical multiple solutions, Hermite predictor-corrector sheme.

INTRODUCTION

Une difficulté principale dans la résolution numérique des systèmes d'équations non linéaires réside dans le fait que la matrice jacobienne du système peut devenir singulière. Autour des points singuliers, la méthode de Newton-Raphson et ses nombreuses variantes ne peuvent plus fonctionner d'une façon satisfaisante. D'autre part la méthode de Newton-Raphson ne fournit pas

(*) Reçu octobre 1989.
[1] U.E.R. Institut de Mathématiques Pures et Appliquées, Tour n° 46, Université Pierre-et-Marie Curie, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France.

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/90/02 159 08/$ 2.80

plusieurs solutions, et elle demande un point initial assez proche d'une solution du système.

Pour contourner ces difficultés, dans cet article, par homotopie, nous ramenons notre problème à la solution d'un système différentiel régulier et au calcul des zéros d'une fonction réelle d'une variable réelle; en introduisant deux variables supplémentaires, les fonctions du système non linéaire étant supposées suffisamment dérivables.

En résolvant le système différentiel associé par la méthode de correction d'Hermite, nous obtenons les solutions approchées de notre problème non linéaire initial. Et en utilisant la méthode de Newton-Raphson, avec les solutions approchées calculées comme des valeurs initiales, nous obtenons les solutions de notre problème non linéaire.

I. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS NON LINÉAIRES PAR HOMOTOPIE ET PAR MÉTHODE DE CORRECTION D'HERMITE

Considérons le système de deux équations suivantes :

$$f(x,y)=0, \qquad g(x,y)=0; \tag{1.1}$$

où (x,y) parcourt un ouvert D de R^2; et f, g sont des fonctions réelles suffisamment dérivables de deux variables réelles.

En fixant un point arbitraire (x_0, y_0) de D, tel que

$$(f(x_0,y_0), g(x_0,y_0)) \neq (0,0),$$

on pose :

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z) &= f(x,y)-(1-z)f(x_0,y_0)=0, \\ G(x,y,z) &= g(x,y)-(1-z)g(x_0,y_0)=0, \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

pour tout $(x,y)\in D$, et pour tout $z\in[0,1]$.

Lorsque $z=0$, on a :

$$F(x_0,y_0,0)=0, \qquad G(x_0,y_0,0)=0;$$

et lorsque $z=1$, on a :

$$F(x,y,1)=f(x,y)=0, \qquad G(x,y,1)=g(x,y)=0.$$

Le système (1.2) est un système non linéaire de deux équations et de trois inconnues x, y, z. En introduisant une variable réelle supplémentaire s, et en dérivant les équations $F(x(s), y(s), z(s))=0$, $G(x(s), y(s), z(s))=0$, par rapport à s, on a un système différentiel régulier d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
x'(s) &= D(F, G)/D(y, z)=f'_y(x, y)\,g(x_0, y_0)-g'_y(x, y)f(x_0, y_0),\\
y'(s) &= D(F, G)/D(z, x)=g'_x(x, y)f(x_0, y_0)-f'_x(x, y)\,g(x_0, y_0),\\
z'(s) &= D(F, G)/D(x, y)=f'_x(x, y)\,g'_y(x, y)-f'_y(x, y)\,g'_x(x, y),
\end{aligned} \tag{1.3}$$

où $s \in R$.

Le système différentiel (1.3) avec la condition initiale

$$x(0)=x_0, \qquad y(0)=y_0, \qquad z(0)=0, \tag{1.4}$$

a une solution unique, qui est la représentation paramétrique de la courbe dans R^3, définie par les équations (1.2).

On utilisera la méthode de correction d'Hermite ([8], [11], [3]) pour résoudre le système différentiel (1.3), (1.4).

Nous préférons la méthode de correction d'Hermite, parce qu'elle est stable au sens de Dahlquist [8], et qu'elle est très efficace. Une description de la méthode de correction d'Hermite est donnée dans [3].

On déterminera, ensuite, les zéros de la fonction réelle $z(s)-1$, en appliquant la méthode de correction d'Hermite à sa fonction inverse.

Finalement, on calculera les valeurs de $x(s)$, $y(s)$ correspondantes par la méthode de correction d'Hermite; ces valeurs de $x(s)$, $y(s)$ sont les solutions du système (1.1).

Mais il vaut mieux effectuer les trois opérations en même temps : résolution du système différentiel (1.3), (1.4); calcul de la valeur, au point 0, de la fonction inverse de $z(s)-1$; et calcul des valeurs correspondantes de $x(s)$, $y(s)$.

Description de l'algorithme

Soit $s=G(Z)$ la fonction inverse de la fonction $Z=z(s)-1$, en supposant que $z(s)$ soit monotone dans l'intervalle considéré.

Lorsque $s=0$, on a :

$$Z_0=z(0)-1=-1 \qquad \text{et} \qquad s_0=G(Z_0)=G(-1)=0.$$

Par suite :

$$Z=0 \;\Leftrightarrow\; z(s)-1=0 \;\Leftrightarrow\; s=G(0).$$

On calcule la valeur $G(0)$ de la fonction $G(Z)$, $Z\in[-1,0]$, de proche en proche à partir de la valeur initiale $G(-1)=0$, par la méthode de correction d'Hermite [3].

Soient $h=1/n$ et $Z_i=-1+ih$, $0\leqq i\leqq n$.

Avec la condition initiale $G(-1)=0$, on calcule les différentes dérivées

$$G^{(k)}(Z_0),\qquad 1\leqq k\leqq q,\quad \text{au point } Z_0=-1,$$

par la relation (1.3).

Ensuite, une première prédiction de la valeur de $G(Z_1)$ est donnée par la formule de Taylor :

$$G(Z_1)=G(Z_0)+hG'(Z_0)+\ldots+(h^q/q!)\,G^{(q)}(Z_0);$$

pratiquement on prend $q=5$.

La relation (1.3) et la méthode de correction d'Hermite donnent les valeurs

$$x^{(k)}(G(Z_1)),\qquad y^{(k)}(G(Z_1)),$$
$$z^{(k)}(G(Z_1)),\qquad 0\leqq k\leqq q,$$

au point $s=G(Z_1)$.

Par suite, on obtient les dérivées $G^{(k)}(Z_1)$, $1\leqq k\leqq q$, en fonction des dérivées $z^{(k)}(G(Z_1))$, $1\leqq k\leqq q$, comme dérivées de la fonction inverse de la fonction $z(s)-1$.

Avec ces valeurs approchées $G^{(k)}(Z_1)$, $0\leqq k\leqq q$, la formule de correction d'Hermite donne une nouvelle valeur de $G(Z_1)$. Avec cette nouvelle valeur de $G(Z_1)$, on calcule de nouveau les dérivées

$$G^{(k)}(Z_1),\qquad 1\leqq k\leqq q,$$

d'après la relation (1.3) et la méthode de correction d'Hermite.

On recommence l'opération jusqu'à ce que la valeur de $G(Z_1)$ soit stationnaire; pratiquement, on fait trois fois cette opération. On passe ensuite au point Z_2, et ainsi de suite.

Finalement, on obtient la valeur $s=G(Z_n)=G(0)$, et on en déduit les valeurs $x(s)$, $y(s)$.

Exemple 1 (Garcia-Zangwill [6], p. 28) :

Considérons le système non linéaire suivant :

$$f(x,y)=-x-y+2y^2-1=0,$$

$$g(x, y) = x - 2y + y^2 + y^3 - 4 = 0, \qquad (15)$$
$$\forall (x, y) \in R^2.$$

Partant du point initial $(x_0, y_0) = (0, 0)$, la relation (1.3) entraîne

$$\left.\begin{aligned}
x'(s) &= f'_y(x, y)\, g(0, 0) \\
&\qquad - g'_y(x, y) f(0, 0) = 3y^2 - 14y + 2, \\
y'(s) &= g'_x(x, y) f(0, 0) \\
&\qquad - f'_x(x, y)\, g(0, 0) = -5, \\
z'(s) &= f'_x(x, y)\, g'_y(x, y) \\
&\quad - f'_y(x, y)\, g'_x(x, y) = -3(y^2 + 2y - 1),
\end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

avec la condition initiale :

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad z(0) = 0. \qquad (1.7)$$

La solution théorique de (1.6), (1.7) est :

$$\begin{aligned}
y(s) &= -5s, \\
x(s) &= 25s^3 + 35s^2 + 2s, \\
z(s) &= s(3 + 15s - 25s^2).
\end{aligned} \qquad (1.8)$$

Lorsque $s \geqq 0$, on a $z(s) = 1$ si $s = 1/5$; et la solution de (1.5) est :

$$x(1/5) = 2, \qquad y(1/5) = -1.$$

II. CALCUL NUMÉRIQUE DE TOUTES LES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS NON LINÉAIRES

Notons que notre algorithme précédent ne fonctionne pas lorsque la fonction $z(s)$ définie par (1.3) a un extremum dans l'intervalle considéré, parce que la dérivée de la fonction $G(Z)$ discutée ci-dessus n'est pas bornée au voisinage de cet extremum.

Par exemple, on ne peut pas obtenir toutes les trois solutions du système non linéaire (1.5); l'équation $z(s) = 1$, $s \in [-1, 1]$, où $z(s)$ est définie par (1.8), a trois racines différentes dans l'intervalle considéré $[-1, 1]$.

Une nouvelle méthode est nécessaire pour contourner cette difficulté.

Premièrement, on suppose qu'il existe un intervalle borné $[a, b]$ tel que tous les zéros de la fonction $s \in R \to z(s) - 1$ soient dans $[a, b]$; et on détermine cet intervalle.

Considérons une partition uniforme (s_i), $0 \leqq i \leqq N$, de $[a, b]$:

$$s_0 = a, \qquad s_{i+1} - s_i = (b-a)/N, \qquad 0 \leqq i \leqq N-1.$$

La résolution du système différentiel (1.3), (1.4) permet de calculer les valeurs $z(s_i)$, $0 \leqq i \leqq N$.

Et on détermine les entiers i_0 tels que $(z(s_{i_0}) - 1)(z(s_{i_0+1}) - 1) \leqq 0$; l'entier N est choisi assez grand pour qu'on puisse obtenir tous les changements de signe de la fonction $s \in [a, b] \to z(s) - 1$.

Par suite, on obtient les valeurs $x(s_{i_0})$, $y(s_{i_0})$, qui sont les solutions approchées de notre système non linéaire (1.1).

En appliquant la méthode de Newton-Raphson au système (1.1), avec les solutions approchées calculées comme des valeurs initiales, on obtient toutes les solutions du système non linéaire (1.1) données par notre méthode d'homotopie.

Exemple 2 :

Considérons un exemple de Branin [2], p. 510 :

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= ax + by + c = 0, \\ g(x, y) &= d \sin(ex) - y = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

où

$$a = 0{,}3, \qquad b = d = 1, \qquad c = -0{,}84, \qquad e = 2\pi.$$

Avec $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, on a $f(x_0, y_0) = c$, $g(x_0, y_0) = 0$. On a : $f'_x = a$, $f'_y = b$, $g'_x = \mathrm{de}\cos(\mathrm{ex})$, $g'_y = -1$, et le système différentiel (1.3) devient :

$$\begin{aligned} x'(s) &= c, \\ y'(s) &= dec \cos(\mathrm{ex}), \\ z'(s) &= -a - bde \cos(\mathrm{ex}), \qquad s \in R; \end{aligned} \tag{2.2}$$

avec la condition initiale :

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad z(0) = 0. \tag{2.3}$$

Cela étant, d'après (2.2), on a $x(s) = cs$, $s \in R$.

Et les courbes (2.1) montrent qu'il n'y a pas de solution lorsque $x \leqq 0$, c'est-à-dire lorsque $s \geqq 0$.

Et il n'y a pas non plus de solution lorsque $y < -1$, c'est-à-dire lorsque $x > 1{,}84/0{,}3$, ou bien $s < -1{,}84/(0{,}3 * 0{,}84) \simeq -7{,}301$.

Il suffit de considérer le cas où $s \in [-10{,}0, 0]$.

En utilisant une partition uniforme de $[-10, 0]$ en 200 points, notre algorithme donne 13 solutions différentes du système non linéaire (2.1) :

```
x1 =       1.46537444830065e-01  x2 =       7.96038766550980e-01
f(x1,x2) =      -3.49113099540332e-17 g(x1,x2) =       2.65629532258949e-18

x1 =       3.69992158861681e-01  x2 =       7.29002352341496e-01
f(x1,x2) =      -3.18755438710738e-17 g(x1,x2) =       1.84314369322536e-17

x1 =       1.08595789102933e+00  x2 =       5.14212632691202e-01
f(x1,x2) =       5.45895793846451e-17 g(x1,x2) =       7.82251867448291e-17

x1 =       1.43273291527924e+00  x2 =       4.10180125416229e-01
f(x1,x2) =       6.17995238316738e-17 g(x1,x2) =      -9.32495183500470e-16

x1 =       2.03676782892137e+00  x2 =       2.28969651323590e-01
f(x1,x2) =       3.29055359349351e-17 g(x1,x2) =       6.62826998149013e-16

x1 =       2.48493422754370e+00  x2 =       9.45197317368910e-02
f(x1,x2) =       1.68051336735253e-17 g(x1,x2) =      -3.64793373459904e-16

x1 =       2.99088110992239e+00  x2 =      -5.72643329767169e-02
f(x1,x2) =      -1.03974988341360e-16 g(x1,x2) =      -2.09954734262281e-15

x1 =       3.53540423853345e+00  x2 =      -2.20621271560034e-01
f(x1,x2) =       7.17741838185404e-17 g(x1,x2) =      -1.46139610829321e-15

x1 =       3.94423273630191e+00  x2 =      -3.43269820890573e-01
f(x1,x2) =      -4.38017677684144e-17 g(x1,x2) =      -1.09986889387792e-15

x1 =       4.59023451969047e+00  x2 =      -5.37070355907142e-01
f(x1,x2) =      -7.31836466427715e-17 g(x1,x2) =       5.24970691917481e-16

x1 =       4.89201759844557e+00  x2 =      -6.27605279533672e-01
f(x1,x2) =      -9.87708179134295e-17 g(x1,x2) =      -1.27930435342427e-15

x1 =       5.66457254912804e+00  x2 =      -8.59371764738410e-01
f(x1,x2) =       4.81385764583564e-17 g(x1,x2) =      -2.85849902775803e-16

x1 =       5.81960482726581e+00  x2 =      -9.05881448179742e-01
f(x1,x2) =       9.08561420542853e-17 g(x1,x2) =       1.14155646740999e-15
```

Exemple 3

Considérons l'exemple suivant de Branin [2] :

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= a - by + c\sin(dy) - x, \\ g(x, y) &= y - e_1 \sin(e_2 x); \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

où $a=1$, $b=2$, $c=2$, $d=4\pi$, $e_1=1{,}9$, $e_2=2\pi$.

Avec le point initial $x_0=0$, $y_0=0$, le système (1.3) devient :

$$\begin{aligned} x'(s) &= -a, \\ y'(s) &= -a e_1 e_2 \cos(e_2 x); \qquad (2.6) \\ z'(s) &= -1 + e_1 e_2 \cos(e_2 x)(-b + cd\cos(dy)); \end{aligned}$$

avec la condition initiale $x(0)=y(0)=z(0)=0$.

En utilisant une partition uniforme de chacun des intervalles $[-7,0]$, $[0,5]$ en 2 000 points, on obtient 123 solutions différentes, au lieu de 119 solutions annoncées par Branin [2], p. 512.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Abadie, *Generalized Reduced Gradient and Global Newton Methods*, in *Optimization and Related Fields*, Lect. Notes in Math., n° 1190, 1986, p. 1-20.
2. F. H. Branin, *Widely Convergent Method for Finding Multiple Solutions of Simultaneous Nonlinear Equations*, I.B.M. J. Res. Dev., 16, 1972, p. 504-522.
3. Bui Doan Khanh et Dang Vu Huyen, *Résolution numérique des équations différentielles par la formule de correction d'Hermite*, C.R. Acad. Sci. Paris, 305, série I, 1987, p. 485-487.
4. L. Cesari, *Optimization, Theory and Applications*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1983.
5. B. C. Eaves, F. J. Gould, H. O. Peitgen et M. J. Todd (éd.), *Homotopy Methods and Global Convergence*, Plenum Press, New York, 1983.
6. C. B. Garcia et W. I. Zangwill, *Pathways to Solutions, Fixed Points and Equilibria*, Prentice-Hall, New York, 1981.
7. C. Hermite, *Sur la formule d'interpolation de Lagrange*, J. fur Reine u. Angew. Math., 94, 1878, p. 70-79.
8. F. R. Loscalzo, *On the Use of Spline Functions for the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, MRC Tech. Sum. Report, n° 869, Madison, 1968.
9. L. B. Rall, *Davidenko's Method for the Solution of Non-Linear Operator Equations*, MRC Tech. Sum Report, n° 948, Madison, 1968.
10. S. M. Robinson (éd.), *Analysis and Computation of Fixed Points*, Acad. Press, 1980.
11. I. J. Schoenberg, *Spline Functions and Differential Equations, First-Order Equations*, Studies in numerical analysis (éd. SCAIFE), Acad. Press, 1974, p. 311-324.