

D. K. DESPOTIS

D. YANNACOPOULOS

**Méthode d'estimation d'utilités additives concaves  
en programmation linéaire multiobjectifs**

*Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche  
opérationnelle. Recherche opérationnelle*, tome 24, n° 4 (1990),  
p. 331-349.

<[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1990\\_\\_24\\_4\\_331\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1990__24_4_331_0)>

© AFCET, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## MÉTHODE D'ESTIMATION D'UTILITÉS ADDITIVES CONCAVES EN PROGRAMMATION LINÉAIRE MULTIOBJECTIFS (\*)

par D. K. DESPOTIS <sup>(1)</sup> et D. YANNAKOPOULOS <sup>(2)</sup>

---

Résumé. — *Dans une importante classe de méthodes en programmation linéaire multiobjectifs, la fonction d'utilité du décideur est maximisée afin de déterminer la meilleure solution-compromis.*

*L'estimation de cette fonction peut être réalisée par plusieurs méthodes utilisant des informations cardinales ou ordinales. Ces méthodes utilisent largement la contrainte de concavité de la fonction d'utilité pour obtenir une solution optimale globale.*

*Ce cahier présente une extension de l'algorithme UTASTAR adaptée au problème d'estimation d'utilités additives concaves.*

*Le nouvel algorithme est illustré par un exemple numérique et son comportement est comparé par expérimentation à celui d'UTASTAR.*

Mots clés : Programmation linéaire multiobjectifs; fonctions d'utilités additives concaves.

Abstract. — *In an important class of multiobjective linear programming methods the determination of a satisfactory solution is realized by the maximization of the decision maker's utility function.*

*Several methods have been proposed for the assessment of utility functions. These methods require different types of information (cardinal or ordinal) and rely on different assumptions for the utility function, such as linearity, additivity and concavity.*

*The latter property, although restrictive for the decision maker's preferences, provides a sufficient condition for a global optimum.*

*In this paper an extension of the algorithm UTASTAR to the assessment of concave utility functions is presented. The new algorithm is illustrated by a numerical example. Finally, the degree to which the concavity restriction influences the results of the assessment process is studied and discussed.*

Keywords : Multiobjective linear programming; concave additive utility functions.

---

(\*) Reçu août 1989.

<sup>(1)</sup> University of Piraeus, Dept. of Statistics and Actuarial Science, 40, Karaoli & Dimitriou Str., Piraeus, 185 32 Greece.

<sup>(2)</sup> Technological Institut of Piraeus, 250, Thivon Str., Egaleo, Greece.

## 1. INTRODUCTION

Les problèmes traités par la programmation mathématique multiobjectifs se posent de la façon suivante :

Déterminer des valeurs possibles pour  $m$  variables de décision continues  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$  dans le but d'optimiser  $n$  fonctions objectifs  $g_1(\underline{x}), \dots, g_n(\underline{x})$  sous un certain nombre de contraintes  $\underline{x} \in A$ .

Soit  $u$  une fonction d'utilité implicite telle que, pour chaque  $\underline{x}, \underline{y} \in A$  :

(i)  $\underline{x}$  est préféré à  $\underline{y}$  ( $\underline{x} P \underline{y}$ ) ssi

$$u(g_1(\underline{x}), \dots, g_n(\underline{x})) > u(g_1(\underline{y}), \dots, g_n(\underline{y}))$$

(ii)  $\underline{x}$  est indifférent à  $\underline{y}$  ( $\underline{x} I \underline{y}$ ) ssi

$$u(g_1(\underline{x}), \dots, g_n(\underline{x})) = u(g_1(\underline{y}), \dots, g_n(\underline{y}))$$

Le problème ci-dessus consiste donc à :

$$\max u(g_1(\underline{x}), \dots, g_n(\underline{x}))$$

sous les contraintes

$$\underline{x} \in A. \quad (1)$$

Plusieurs méthodes ont déjà été développées pour ce type de problèmes. Une classe importante de ces méthodes utilise ces fonctions d'utilité d'une manière interactive dans le but de générer un ensemble de solutions efficaces d'utilité croissante [2, 11, 13] ou même d'estimer une solution unique d'utilité maximale [4]. En effet, dans ces méthodes le décideur doit répondre à plusieurs types de questions (*i.e.* taux de substitution explicite, classement d'alternatives, ...) dans le but d'estimer localement la fonction d'utilité  $u$  ou bien de déterminer une direction de recherche d'une amélioration de  $u$ .

Une approche du problème (1) passe par l'agrégation de  $n$  critères  $g_1, \dots, g_n$  en un critère unique  $u(g_1, \dots, g_n)$ . Dans cette approche, la résolution de ce problème se déroule en deux étapes :

I. Estimation d'un modèle analytique de préférence globale sous forme d'une fonction d'utilité  $u$ . Le cadre méthodologique général de cette phase est suggéré par la théorie d'utilité multiattribut (MAUT [6]). Notons aussi le rôle important du style cognitif du décideur.

II. A partir de  $u$ , recherche d'une solution d'utilité maximale en utilisant des techniques de programmation mathématique, linéaire ou non linéaire. A noter que si  $u$  est non linéaire, elle peut être approchée par une fonction

linéaire par morceaux qui, pour arriver à un optimum global, doit être concave.

Une méthode importante pour la résolution de l'étape I de cette approche est UTA proposée par Jacquet-Lagrèze et Siskos [5]. Cette méthode estime une fonction d'utilité additive en analysant la préférence d'un décideur exprimée sous forme d'un préordre sur un ensemble d'actions de référence.

Néanmoins, les problèmes traités par UTA sont caractérisés par le nombre fini d'actions et une certitude concernant le profil de chaque action sur les critères choisis.

Siskos [7] a déjà proposé une première extension de cette méthode à des problèmes en univers aléatoire.

En Programmation Linéaire Multiobjectifs (PLMO), l'espace des décisions, étant continu, est caractérisé indirectement par un ensemble de contraintes. Dans ce cas, l'utilisation de la méthode UTA présuppose une procédure de construction d'un sous-ensemble de référence fini  $A'$  des décisions possibles ou même hypothétiques.

Jacquet-Lagrèze, Meziani et Slowinski [4], dans le cadre d'une méthode de PLMO, utilisent PREFCALC [3], produit aussi d'UTA, dans le but d'estimer des fonctions d'utilité marginales, linéaires par morceaux, permettant une restitution optimale d'une préférence explicitée sur un ensemble fini ( $A'$ ) de solutions efficaces. La construction de  $A'$  est réalisée par l'application de la première étape de l'algorithme de Choo et Atkins [1].

Siskos et Despotis [8, 9] pour arriver à une solution satisfaisante à des problèmes en PLMO ont présenté une méthode interactive dans laquelle ils utilisent aussi l'algorithme UTASTAR [10], version améliorée d'UTA, pour estimer la préférence globale du décideur.

Les algorithmes UTA classique et UTASTAR n'assurent pas la concavité des fonctions d'utilité marginales. Ces algorithmes, à travers leurs applications, conduisent à l'estimation d'une fonction d'utilité non nécessairement concave.

La maximisation d'une telle fonction dans un espace de décision continu ne garantit pas une solution d'un optimum global.

Cet article présente une extension de l'algorithme UTASTAR adapté au problème d'estimation d'utilités additives concaves. La nouvelle méthode est illustrée par un exemple numérique et elle est comparée à UTASTAR sur les indicateurs de cohérence.

## 2. ESTIMATION D'UTILITÉS ADDITIVES CONCAVES PAR L'ALGORITHME UTASTAR

L'algorithme UTASTAR analyse la préférence globale d'un décideur exprimée sous forme de préordre total sur un ensemble d'actions de référence  $A' = \{a_k, k = 1, \dots, s\}$  selon les étapes suivantes :

(i) Discrétiser l'échelle  $[g_{i^*}, g_i^*]$  de chaque critère  $g_i$  en  $\alpha_i$  points équidistants  $g_i^j, j = 1, \dots, \alpha_i$ . Les valeurs  $g_{i^*}$  et  $g_i^*$  représentent respectivement le niveau le moins et le plus préféré du critère  $g_i$  et  $\alpha_i$  est estimé en fonction de la répartition des valeurs des actions dans l'échelle  $[g_{i^*}, g_i^*]$ .

(ii) Écrire, dans l'ordre dicté par le préordre de préférence, les utilités totales des actions :

$$u[g(a_k)] = \sum_{i=1}^n u_i(g_i(a_k))$$

et la contrainte de normalisation de poids :

$$\sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1.$$

L'utilité marginale  $u_i(g_i(a_k))$  est estimé en fonction d'utilités  $u_i(g_i^j)$  et  $u_i(g_i^{j+1})$  par interpolation linéaire de  $g_i(a_k)$  dans l'échelle  $[g_i^j, g_i^{j+1}]$  tandis que  $u_i(g_i^j)$  est exprimé selon la formule :

$$u_i(g_i^j) = \sum_{d=1}^{j-1} w_{id}, \quad j = 2, \dots, \alpha_i$$

suivant la transformation  $w_{ij} = u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j)$ , ce qui tient compte de la monotonie des critères, et les contraintes de normalisation :  $u_i(g_i^1) = u_i(g_{i^*}) = 0$ .

Ainsi pour  $t_i = (g_i^{j+1} - g_i(a_k)) / (g_i^{j+1} - g_i^j)$  on déduit l'expression :

$$u_i(g_i(a_k)) = \left( \sum_{d=1}^{j-1} w_{id} \right) + (1 - t_i) w_{ij}$$

et finalement l'expression analytique suivante :

$$u[g(a_k)] = \sum_{i=1}^n \left[ \left( \sum_{d=1}^{j-1} w_{id} \right) + (1 - t_i) w_{ij} \right].$$

(iii) Définir une chaîne sur le préordre allant du premier au dernier élément, en écrivant pour chaque paire  $(a_k, a_{k+1})$  d'actions consécutives les expressions analytiques, suivantes :

$$u[g(a_k)] - u[g(a_{k+1})] + \sigma^+(a_k) - \sigma^-(a_k) - \sigma^+(a_{k+1}) + \sigma^-(a_{k+1})$$

où  $\sigma^+(a_k)$ ,  $\sigma^-(a_k)$  sont respectivement des fonctions d'erreur de surestimation et sous-estimation.

(iv) Résoudre le programme linéaire :

$$F(*) = \min F = \sum_{k=1}^s [\sigma^+(a_k) + \sigma^-(a_k)]$$

sous les contraintes

$$u[g(a_k)] - u[g(a_{k+1})] + \sigma^+(a_k) - \sigma^-(a_k) - \sigma^+(a_{k+1}) + \sigma^-(a_{k+1}) \geq \delta \quad \text{si } a_k P a_{k+1}$$

$$u[g(a_k)] - u[g(a_{k+1})] + \sigma^+(a_k) - \sigma^-(a_k) - \sigma^+(a_{k+1}) + \sigma^-(a_{k+1}) = 0 \quad \text{si } a_k I a_{k+1}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha_i - 1} w_{ij} = 1 \quad (2)$$

$$w_{ij} \geq 0, \quad \sigma^+(a_k) \geq 0, \quad \sigma^-(a_k) \geq 0, \quad \forall i, j, k$$

où  $\delta$  - petite valeur positive - représente le seuil de discrimination entre les utilités de deux classes d'équivalence consécutives.

A noter que les contraintes de normalisation d'utilité nous suggèrent, en tout cas, des valeurs pour  $\delta \leq 1/Q$  où  $Q$  est le nombre des classes d'équivalence dans le préordre de préférence.

Pourtant, le fait que la valeur minimale de la somme d'erreurs absolues  $F(*)$  est fonction linéaire de  $\delta$ , ce que nous avons prouvé expérimentalement [12], nous conduit à accepter comme  $\delta$  une valeur proche à  $Q/10$ , en tout cas significative dans l'échelle d'utilité  $[0,1]$ .

(iv) Tester l'existence de solutions optimales multiples. En cas de dégénérescence, trouver celles des solutions qui maximisent et/ou minimisent les poids :

$$u_i(g_i^{\alpha_i}) = \sum_{j=1}^{\alpha_i - 1} w_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

L'application de cet algorithme à des problèmes en PLMO, où les critères sont des fonctions linéaires à optimiser et les actions des vecteurs correspondent à des alternatives réelles ou éventuellement hypothétiques conduit à l'estimation d'une fonction d'utilité non nécessairement concave.

Ainsi la maximisation d'une telle fonction ne garantit pas un optimum global. Ce problème est résolu en ajoutant aux contraintes de préférence et de normalisation qui existent déjà dans UTASTAR la condition que pour chaque triplet des discrétisations consécutives,

$$g_i^{j-1}, g_i^j, g_i^{j+1}; \quad j=2, \dots, \alpha_i-1 \quad \text{et} \quad i=1, \dots, n :$$

$$u_i(g_i^j) - u_i(g_i^{j-1}) \geq u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j)$$

ou en fonction de variations  $w_{ij}$  :

$$w_{i,j-1} - w_{ij} \geq 0,$$

condition assurant que la fonction discrète obtenue puisse être prolongée en une fonction concave sur  $[g_i^*, g_i^*]$ .

La quatrième étape de l'algorithme UTASTAR se présente donc avec les transformations ci-dessous :

$$F^* = \min F = \sum_{k=1}^s [\sigma^+(a_k) + \sigma^-(a_k)]$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} u[g(a_k)] - u[g(a_{k+1})] + \sigma^+(a_k) - \sigma^-(a_k) - \sigma^+(a_{k+1}) \\ + \sigma^-(a_{k+1}) &\geq \delta \quad \text{si } a_k P a_{k+1} \\ u[g(a_k)] - u[g(a_{k+1})] + \sigma^+(a_k) - \sigma^-(a_k) - \sigma^+(a_{k+1}) \\ + \sigma^-(a_{k+1}) &= 0 \quad \text{si } a_k I a_{k+1} \end{aligned} \quad (3)$$

$$w_{i,j-1} - w_{ij} \geq \varepsilon, \quad (i=1, \dots, n), \quad (j=2, \dots, \alpha_i-1)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha_i-1} w_{ij} = 1$$

$$w_{ij} \geq 0, \quad \sigma^+(a_k) \geq 0, \quad \sigma^-(a_k) \geq 0, \quad \forall i, j, k$$

où  $\varepsilon$  petite valeur positive qui garantit la concavité des fonctions d'utilités marginales.

## 3. UN EXEMPLE NUMÉRIQUE

Supposons le PLMO suivant

$$\begin{aligned} \max g_1 &= 10x_1 + 15.5x_2 + 9.5x_3 + 7x_4 \\ \max g_2 &= -12x_1 - 14x_2 - 11x_3 - 6x_4 \\ \max g_3 &= x_4 \end{aligned} \quad (4)$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &\leq 810 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 920 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &\leq 750 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 700 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &\leq 750 \\ x_1 &\geq 25 \\ x_2 &\geq 30 \\ x_3 &\geq 25 \\ x_4 &\geq 20 \\ 3.6x_1 + 6x_3 &\leq 500 \end{aligned} \quad (5)$$

Les valeurs-limites des fonctions-objectifs (tableau I) sont obtenues par la résolution de six programmes linéaires unicritères où l'on cherche à maximiser et minimiser successivement ces fonctions (4) sous les contraintes (5).

TABLEAU I  
*Valeurs-limites des fonctions-objectifs.*

	$g_1$	$g_2$	$g_3$
Meilleure valeur . . . . .	3 897.22	-1 115.00	352.00
Plus mauvaise valeur . . . . .	1 092.50	-3 803.89	20.00

Ce tableau sert de base de construction d'un ensemble de profils hypothétiques  $A'$  de manière qu'aucun de ces vecteurs ne domine tous les autres. Ainsi, le décideur explicitera sa préférence sur  $A'$  sans se trouver face à des situations triviales.

Les profils hypothétiques de décision choisis arbitrairement se présentent dans le tableau II. On peut facilement constater qu'ils sont obtenus par une discrétisation de l'échelle de chaque critère en huit points équidistants.



TABLEAU II  
*Profils de décision.*

Profils	Evaluation multicritère		
	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$
$a_1$	1092.50	-3419.78	352.50
$a_2$	1493.17	-3803.89	305.00
$a_3$	1893.84	-2651.52	257.50
$a_4$	2294.51	-2267.39	210.00
$a_5$	2695.18	-1115.00	162.50
$a_6$	3095.85	-1499.13	20.00
$a_7$	3496.52	-1883.26	67.50
$a_8$	3897.22	-3035.65	115.00

Supposons qu'un individu attribue aux huit vecteurs le préordre total de préférence suivant :

$$a_5 P a_7 P a_6 P a_4 P a_8 P a_3 P a_1 P a_2.$$

La première étape d'UTASTAR consiste à exprimer les utilités de huit profils en fonction de  $w_{ij}$ . Pour le calcul analytique des utilités, les échelles discrètes suivantes ont été retenues :

$$[g_{1^*}, g_1^*] = [1\ 092.50, 2\ 027.41, 2\ 962.32, 3\ 897.22]$$

$$[g_{2^*}, g_2^*] = [-3\ 803.89, -2\ 907.60, -2\ 011.30, -1\ 115.00]$$

$$[g_{3^*}, g_3^*] = [20.00, 130.83, 241.67, 352.50]$$

d'où, par interpolation linéaire, l'on déduit :

$$u(a_5) = w_{11} + 0.71 w_{12} + w_{21} + w_{22} + w_{23} + w_{31} + 0.29 w_{32}$$

$$u(a_7) = w_{11} + w_{12} + 0.57 w_{13} + w_{21} + w_{22} + 0.14 w_{23} + 0.43 w_{31}$$

$$u(a_6) = w_{11} + w_{12} + 0.14 w_{13} + w_{21} + w_{22} + 0.58 w_{23}$$

$$u(a_4) = w_{11} + 0.58 w_{12} + w_{21} + 0.72 w_{22} + w_{31} + 0.71 w_{32}$$

$$u(a_8) = w_{11} + w_{12} + w_{13} + 0.86 w_{21} + 0.86 w_{31}$$

$$u(a_3) = 0.86 w_{11} + w_{21} + 0.29 w_{22} + w_{31} + w_{32} + 0.14 w_{33}$$

$$u(a_1) = 0.43 w_{21} + w_{31} + w_{32} + w_{33}$$

$$u(a_2) = 0.43 w_{11} + w_{31} + w_{32} + 0.57 w_{33}.$$

Finalement, en passant par l'étape (ii) de comparaison des profils par paires, on arrive bien au programme linéaire (voire tableau III) du nouveau modèle UTASTAR ( $\delta$  est pris égal à 0.01 et  $\varepsilon = 0$ ).

La résolution de ce programme fournit les résultats suivants :

$$w_{11} = .095, \quad w_{12} = .095, \quad w_{13} = .095$$

$$w_{21} = .167, \quad w_{22} = .167, \quad w_{23} = .167$$

$$w_{31} = .214, \quad w_{32} = 0, \quad w_{33} = 0.$$

Les autres variables ( $\sigma$ ) sont égales à zéro.

Dans la dernière étape, le modèle teste l'existence des solutions post-optimales.

Dans le cas de dégénérescence, la fonction économique de la solution optimale devient une contrainte d'égalité. Pour obtenir des solutions post-optimales, les fonctions économiques sont celles qui maximisent successivement tous les critères.

Nous avons donc à résoudre les trois programmes linéaires du tableau IV.

Les solutions obtenues pour chacun de ces programmes linéaires sont les suivantes :

$$\max z_1 : w_{11} = .410, \quad w_{12} = .088, \quad w_{13} = 0$$

$$w_{21} = .436, \quad w_{22} = .005, \quad w_{23} = .005$$

$$w_{31} = .056, \quad w_{32} = 0, \quad w_{33} = 0$$

$$\max z_2 : w_{11} = .060, \quad w_{12} = .060, \quad w_{13} = .060$$

$$w_{21} = .682, \quad w_{22} = .057, \quad w_{23} = .057$$

$$w_{31} = .023, \quad w_{32} = 0, \quad w_{33} = 0$$

$$\max z_3 : w_{11} = .184, \quad w_{12} = .184, \quad w_{13} = .002$$

$$w_{21} = .093, \quad w_{22} = .093, \quad w_{23} = .093$$

$$w_{31} = .117, \quad w_{32} = .117, \quad w_{33} = .117$$

Finalement, pour synthétiser ces résultats, l'algorithme calcule la moyenne de ces solutions :

$$\text{moy } \underline{z} : w_{11} = .218, \quad w_{12} = .111, \quad w_{13} = .020$$





$$w_{21} = .404, \quad w_{22} = .052, \quad w_{23} = .052$$

$$w_{31} = .065, \quad w_{32} = .039, \quad w_{33} = .039.$$

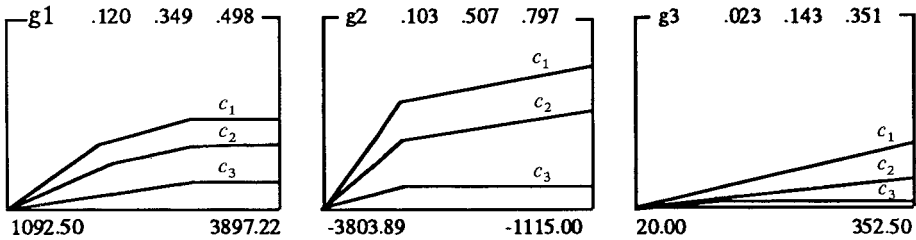


Figure 1. – Fonctions d'utilités marginales.

On est en mesure de constater l'instabilité du modèle de préférence proposé par l'algorithme ainsi que la concavité des fonctions d'utilité marginales. Dans la figure 1, on représente graphiquement chaque critère par trois courbes : les courbes  $c_1$  correspondent à la solution post-optimale qui lui donne les valeurs les plus élevées, les courbes  $c_2$  à la solution moyenne et les courbes  $c_3$  à la solution lui donnant les valeurs les plus faibles.

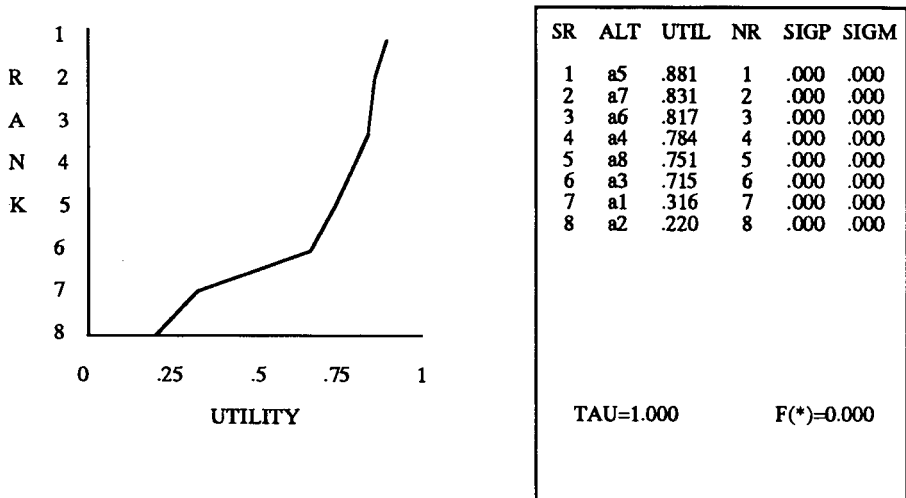


Figure 2. – Courbe de régression ordinale.

Finalement dans la figure 2, on représente la courbe de régression ordinale, le tableau d'utilités globales pour les huit profils de référence ainsi que les

indicateurs de cohérence  $\tau$ -Kendall et  $F^*$ . L'indicateur  $\tau$ -Kendall se situe dans l'espace  $[-1,1]$  et reflète le degré de cohérence entre deux préordres sur  $A'$  tandis que  $F^*$  est la valeur minimale de la somme d'erreurs absolues.

L'instabilité remarquée – symptomatique dans le cas présenté – nous conduit à penser que les préférences du décideur peuvent être expliquées par une variété de fonctions d'utilités, bien différentes entre elles, ce qui rend difficile le choix d'une seule. Pourtant, le calcul de la solution moyenne fournit un moyen de composition de ces fonctions en une seule considérée comme la plus représentative des préférences du décideur.

D'autre part, cette instabilité en question, pourrait très bien inciter l'utilisateur à enrichir l'information du départ (nombre d'actions rangées) dans le but de rendre l'estimation aussi singulière que possible.

#### 4. EXPÉRIMENTATION ET DISCUSSION

Une question importante qui se pose par l'application du modèle (3) présenté ci-dessus est l'impact de l'introduction des contraintes de concavité sur les indices de cohérence entre modèle de préférence et décideur.

Dans les deux modèles le degré de restitution de la préférence du décideur est mesuré par le  $\tau$ -Kendall.

##### *Méthodologie de l'expérimentation*

Une première approche de ce problème est entreprise au moyen d'une expérimentation de deux modèles sur les mêmes jeux de données et l'analyse comparative des indices de cohérence.

On a donc appliqué les deux modèles sur dix problèmes différents dont les dimensions se présentent dans le tableau V.

A noter que pour chaque problème, nous avons utilisé dix préordres différents – ce qui pourrait correspondre aux préférences d'un nombre égal de décideurs hypothétiques – et cela pour obtenir un échantillon de comparaison suffisamment large.

Finalement, le rapport entre les deux modèles a été testé pour différentes valeurs de  $\epsilon$  par les indicateurs  $\tau$ -Kendall et  $F^*$ .

TABLEAU V  
Dimensions des problèmes.

Problème	Nombre de critères	Nombre d'actions de référence
1. ....	3	8
2. ....	3	8
3. ....	3	9
4. ....	3	10
5. ....	4	8
6. ....	4	9
7. ....	4	10
8. ....	5	8
9. ....	5	9
10. ....	5	10

### Résultats et discussion

Afin d'évaluer la différence entre les deux versions, nous avons porté notre attention sur la divergence du  $\tau$ -Kendall qui est considéré comme l'indicateur le plus représentatif de la restitution du préordre. Les résultats globaux apparaissent dans le tableau VI.

TABLEAU VI  
Résultats sommaires de l'expérimentation.

		$\tau(c)-\tau(u)>0$	$\tau(c)-\tau(u)<0$	$\tau(c)-\tau(u)=0$
% cas		18	62	20
100( $\tau(c)-\tau(u)$ )/ $\tau(u)$ %	minimums	1.7	2.6	-
	maximums	32.5	40.7	-
	moyens	10.4	16.3	-

Dans le tableau VI  $\tau(c)$  correspond au  $\tau$ -Kendall du nouveau modèle et  $\tau(u)$  à celui d'UTASTAR. La première ligne de ce tableau nous montre le pourcentage des cas pour lesquels la différence  $\tau(c)-\tau(u)$  a été trouvée positive, négative et nulle respectivement. Dans les lignes suivantes du même tableau sont présentés, pour chacun des cas ci-dessus en pourcentages, les déviations minimales, maximales et moyennes du  $\tau(c)$  par rapport à  $\tau(u)$ .

Les données complètes et les résultats obtenus pour trois cas caractéristiques sont présentés dans les tableaux VII, VIII et IX et les figures 3, 4, 5 respectivement.

TABLEAU VII  
*Profils de décision.*

Evaluation multicritère					
Profils	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	Préordre
$a_1$	8850.000	-1450.000	74.260	595.026	8
$a_2$	8172.857	-1685.476	93.957	705.124	6
$a_3$	7495.714	-1920.952	113.655	815.223	3
$a_4$	6818.571	-2156.429	133.353	925.321	7
$a_5$	6141.429	-2391.905	153.051	1035.419	5
$a_6$	5464.286	-2627.381	172.748	1145.517	2
$a_7$	4787.143	-2862.857	192.445	1255.616	4
$a_8$	4110.000	-3098.333	212.143	1365.714	1

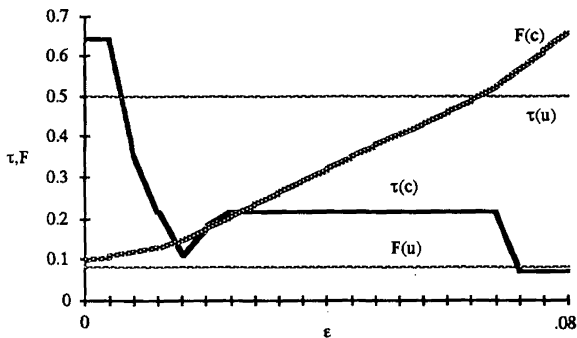


Figure 3. — Résultats obtenus avec les données du tableau VII.

Dans le premier cas, les résultats obtenus par l'application des deux modèles sur les données du tableau VII apparaissent dans la figure 3.

La valeur de  $F(c)$  ( $F^*$ ) du nouveau modèle) est croissante avec  $\epsilon$  et en tout cas supérieure à  $F(u)$  ( $F^*$ ) d'UTASTAR), ce qui est résulté de l'accroissement du nombre de contraintes.

Néanmoins, pour des valeurs de  $\epsilon$  proches à zéro ( $\epsilon \leq 0.004$ ) on remarque un meilleur  $\tau$ -Kendall pour le nouveau modèle. Par ailleurs la courbe  $\tau(c)$  n'est pas strictement décroissante (maxima locaux). Cette incohérence entre  $F(c)$  et  $\tau(c)$ , déjà commentée par Jacquet-Lagrèze et Siskos [5], est due au fait que  $\tau$  est non seulement fonction de  $F$  mais surtout de la manière avec laquelle les points correspondant aux actions mal estimées sont dispersés



TABLEAU VIII  
*Profils de décision.*

Evaluation multicritère				
Profils	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	Préordre
a <sub>1</sub>	1092.50	-3419.78	352.50	7
a <sub>2</sub>	1493.17	-3803.89	305.00	8
a <sub>3</sub>	1893.84	-2651.52	257.50	6
a <sub>4</sub>	2294.51	-2267.39	210.00	4
a <sub>5</sub>	2695.18	-1115.00	162.50	1
a <sub>6</sub>	3095.85	-1499.13	20.00	3
a <sub>7</sub>	3496.52	-1883.26	67.50	2
a <sub>8</sub>	3897.22	-3035.65	115.00	5

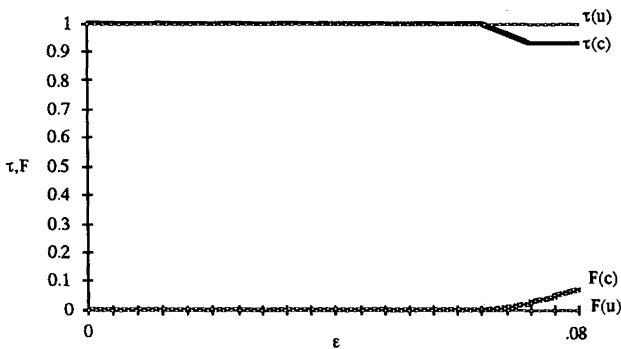


Figure 4. — Résultats obtenus avec les données du tableau VIII.

autour de la courbe de régression ordinale. A noter qu'une erreur estimée par le modèle sur une action ne conduit pas nécessairement à une violation du préordre.

Dans le second cas (tableau VIII, *fig. 4*) pour  $\varepsilon \leq 0.064$  les deux modèles donnent le même  $\tau$ -Kendall.

Finalement, dans le troisième cas (tableau IX, *fig. 5*)  $\tau(u) > \tau(c)$  pour tout  $\varepsilon$ .

TABLEAU IX  
*Profils de décision.*

Evaluation multicritère					
Profils	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	Préordre
a <sub>1</sub>	8850.000	-1450.000	74.260	595.026	3
a <sub>2</sub>	8172.857	-1685.476	93.957	705.124	6
a <sub>3</sub>	7495.714	-1920.952	113.655	815.223	2
a <sub>4</sub>	6818.571	-2156.429	133.353	925.321	5
a <sub>5</sub>	6141.429	-2391.905	153.051	1035.419	7
a <sub>6</sub>	5464.286	-2627.381	172.748	1145.517	1
a <sub>7</sub>	4787.143	-2862.857	192.445	1255.616	4
a <sub>8</sub>	4110.000	-3098.333	212.143	1365.714	8

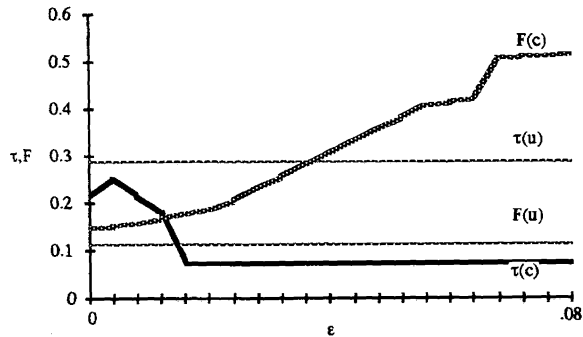


Figure 5. — Résultats obtenus avec les données du tableau IX.

## 5. CONCLUSION

Nous avons présenté dans cet article une version d'UTASTAR adaptée à des problèmes qui font l'objet de la PLMO.

Le point essentiel de cette version est l'insertion de contraintes supplémentaires dans le but d'obtenir des fonctions d'utilité marginales concaves.

Bien que le nombre de contraintes ait été augmenté de  $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - 2)$ , cela ne paraît pas influencer essentiellement le nombre d'itérations du programme linéaire.

Comme on peut le remarquer sur les résultats de l'expérimentation cités ci-dessus, l'hypothèse de concavité des fonctions d'utilité marginale, réalisée par l'introduction des contraintes supplémentaires, n'entraîne pas systématiquement une diminution des valeurs des indicateurs de cohérence.

Au contraire, il est remarquable que malgré l'introduction de ces contraintes il existe des cas où le nouveau modèle conduit à une meilleure restitution des préférences.

Cela nous conduit à penser que la méthode UTA, n'arrive pas toujours à une restitution optimale du préordre ce qui peut s'expliquer par le fait que l'optimum correspond à l'erreur minimale moyenne sans que soit prise en compte la dispersion des erreurs.

Aussi, nos recherches actuelles sont-elles orientées vers une nouvelle version d'UTA où l'analyse post-optimale consiste en une minimisation de la dispersion d'erreurs.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. E. U. CHOO et D. R. ATKINS, An Interactive Algorithm for Multicriteria Programming, *Compt. and Ops Res*, 1980, 7, p. 81-87.
2. A. M. GEOFFRION, J. S. DYER et A. FEINBERG, An Interactive Approach for Multicriterion Optimization with an Application to the Operation of an Academic Dept., *Management Science*, 1972, 19, n° 4, p. 357-368.
3. E. JACQUET-LAGRÈZE, PREFCALC, Évaluation et décision multicritères, *Euro-Decision*, 1983.
4. E. JACQUET-LAGRÈZE, R. MEZIANI et R. SLOWINSKI, MOLP with an Interactive Assessment of a Piecewise Linear Utility Function, *European Journal of Operational Research*, 1987, n° 3, p. 350-357.
5. E. JACQUET-LAGRÈZE et J. SISKOS, Assessing a Set of Additive Utility Functions for Multicriteria Decision Making – The UTA Method, *European Journal of Operational Research*, 1982, n° 10, p. 151-164.
6. R. L. KEENEV et H. RAIFFA, Decisions with Multiple Objectives, *Preferences and Value Tradeoffs*, Wiley, New York, 1976.
7. J. SISKOS, Analyse de systèmes de décision multicritère en univers aléatoire. *Foundations of Control Engineering*, 1983, 8, n° 3.
8. J. SISKOS et D. K. DESPOTIS, A Multiobjective Linear Programming Algorithm Based on Satisfactory Goals and Interactive Utility Assessment, *Cahier du LAMSADE*, n° 81, Université de Paris-Dauphine, Paris, 1987.
9. J. SISKOS et D. K. DESPOTIS, A DSS Oriented Method for Multiobjective Linear Programming Problems, *Decision Support System*, 1989, 5, p. 47-55.
10. J. SISKOS et D. YANNAKOPOULOS, UTASTAR – An Ordinal Regression Method for Building Additive Value Functions, *Investigação Operacional*, 1985, 5, n° 1, p. 39-53.

11. T. J. STEWART, An Interactive Multiple Objective Linear Programming Method Based on Piecewise-Linear Additive Value Functions, *IEEE Transactions*, SMC-17, 1987, n° 5, p. 799-805.
12. D. YANNAKOPOULOS, Mise en place et expérimentation d'un système interactif d'aide à la décision multicritère : Le Système MINORA, *Thèse de 3<sup>e</sup> cycle*, Université de Paris-Dauphine, Paris, 1985.
13. S. ZIONTS et J. WALLENIUS, An Interactive Multiple Objective Linear Programming Method for a Class of Underlying Non-linear Utility Functions, *Management Science*, 1983, 29, p. 519-529.