REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

M. ATTEIA
A. ELQORTOBI

Hamiltoniens quasi-convexes quasi-concaves

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 25, nº 4 (1991), p. 425-438.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1991__25_4_425_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 25, n° 4, 1991, p. 425 à 438)

HAMILTONIENS QUASI-CONVEXES QUASI-CONCAVES (*)

par M. ATTEIA [1] et A. ELQORTOBI [2]

Résumé. — *Notre objectif est de définir la polaire projective d'une fonction quasi-convexe quasi-concave. On utilisera dans notre étude la notion de polarité partielle d'une fonction quasi-convexe de plusieurs variables. On adopte donc le point de vue de Laurent. Cependant, comme on va le voir, ses résultats peuvent être étendus dans une autre direction.*

Mots clés : Optimisation; fonction quasi-convexe quasi-concave; hamiltonien.

Abstract. — *Our goal is to define the projective polar of a quasiconvex-quasiconcave function. In our study, we use the notion of partial polarity of a quasiconvex-quasiconcave function of multiple variables. Then we adopt the point of view of Laurent. However, his results can be extended in other direction.*

Keywords : Optimization; quasiconvex quasiconcave function; hamiltonian.

1. INTRODUCTION

Dans cette partie, on va rappeler certaines définitions et propriétés qui nous seront utiles. Dans tout ce qui suit, X et X' (resp. Y et Y') sont deux espaces vectoriels topologiques localement convexes mis en dualité séparante par la forme bilinéaire qu'on notera de manière unique $\langle\ ,\ \rangle$.

DÉFINITION 1 : On dit qu'une fonction $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ est *quasi-convexe* (qcx) si : $\forall (u, v) \in X \times X$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f[\lambda u + (1-\lambda) v] \leq \operatorname{Max}[f(u), f(v)]$. f est *quasi-concave* (qcv) si $-f$ est quasi-convexe.

(*) Reçu août 1990.

(1) Département de Mathématiques, Université Paul-Sabatier, Toulouse (France).
(2) Département de Mathématiques, Université Mohamed 1er, Faculté des Sciences, Oujda (Maroc) et Département de Mathématiques et d'Informatique, Université de Sherbrooke, Faculté des Sciences, Sherbrooke (Canada).

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/91/04 425 14/$ 3.40

On dit qu'une fonction $k \in \bar{\mathbb{R}}^{X \times Y}$ est *quasi-convexe quasi-concave* (qcx-qcv) ou *fonction selle* si :

$\forall y \in Y$ la fonction $x \in X \mapsto k(x, y)$ est quasi-convexe et

$\forall x \in X$ la fonction $y \in Y \mapsto k(x, y)$ est quasi-concave.

DÉFINITION 2 : Soit $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$.

Posons :

$$\forall x' \in X', \quad f^0(x') = -\operatorname{Inf}\{f(x)/\langle x, x' \rangle > 1\},$$
$$f^\Delta(x') = -\operatorname{Inf}\{f(x)/\langle x, x' \rangle < 1\},$$

et

$$\forall x \in X,$$
$$f^{00}(x) = -\operatorname{Inf}\{f^0(x')/\langle x, x' \rangle > 1\}, \qquad f^{\Delta\Delta}(x) = -\operatorname{Inf}\{f^\Delta(x')/\langle x, x' \rangle < 1\}.$$

Les foctions $f^\# = \operatorname{Min}(f^0, f^\Delta)$ et $f^{\#\#} = \operatorname{Max}(f^{00}, f^{\Delta\Delta})$ sont appelées respectivement *polaire* et *bipolaire projectives* de f.

Principaux résultats : ([1], [2])

(i) $f^{\#\#}$ est la plus grande minorante quasi-convexe et semi-continue inférieurement (s.c.i.) de f; par suite, si f est qcx et s.c.i., alors $f = f^{\#\#}$. En plus, $f \leqq g \Rightarrow f^{\#\#} \leqq g^{\#\#}$.

(ii) $f^0(0) = -\infty$ et $f^\Delta(0) = -\operatorname{Inf}\{f(x)/x \in X\}$.

En général $f^{\#\#} \neq (f^\#)^\#$, d'où on posera :

$$f^{\#n} = \begin{cases} f^\# & \text{si } n \text{ impair} \\ f^{\#\#} & \text{si } n \text{ pair non nul.} \end{cases}$$

DÉFINITION 3 : Soit $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$. On dira que f vérifie la propriété $P(1)$ [resp. $P(2)$] si $f(0) = -\infty$ (reps. $\forall x \in X, \forall \alpha \in [0, 1]\, f(\alpha X) \geqq f(x)$).

LEMME 1 [10] : *Soit f une fonction qcx et s.c.i. appartenant à $\bar{\mathbb{R}}^X$. f vérifie $P(1) \Leftrightarrow f = f^{00}$ et f vérifie $P(2) \Leftrightarrow f = f^{\Delta\Delta}$.*

Remarque 1 : Comme $f^0 = f^{000}$ (resp. $f^\Delta = f^{\Delta\Delta\Delta}$), on déduit que f^0 (resp. f^Δ) vérifie $P(1)$ [resp. $P(2)$].

DÉFINITION 4 [10] : Soit une fonction qcx $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ et $x \in X$. $x' \in X'$ est un *sous-gradient* de f au point x selon une polarité notée « + » si et seulement si : $f^+(x') + f(x) = 0$ et x' n'appartient pas à $\{x\}^+$.

L'ensemble des sous-gradients de f au point x pour la polarité « + » s'appelle le *sous-différentiel* et sera noté $\partial f(x)$.

2. POLARITÉ PARTIELLE D'UNE FONCTION

Étant donnée une fonction qcx-qcv $k \in \overline{\mathbb{R}}^{X \times Y}$, nous aurons à faire certaines opérations de polarité par rapport à la première variable ou la seconde variable. On posera :

$$\forall x \in X \quad (\text{resp. } \forall x' \in X')$$

$$A(x) = \{ x' \in X' / \langle x, x' \rangle > 1 \} \quad (\text{resp. } A(x') = \{ x \in X / \langle x, x' \rangle > 1 \})$$

et

$$B(x) = \{ x' \in X' / \langle x, x' \rangle < 1 \} \quad (\text{resp. } B(x') = \{ x \in X / \langle x, x' \rangle < 1 \}).$$

On notera aussi $A_X k$ et $B_X k$ [suivant qu'on utilise l'ensemble $A(x')$ ou $B(x')$], les fonctions de deux variables obtenues en appliquant l'opération de polarité par rapport à la première variable $x \in X$.

$$A_X k(x', y) = -\operatorname{Inf}\{ k(x, y) / x \in A(x') \} \tag{1}$$

$$B_X k(x', y) = -\operatorname{Inf}\{ k(x, y) / x \in B(x') \}. \tag{2}$$

On sait que $A_X k$ et $B_X k$ sont qcx et s.c.i. par rapport à x' ([2]). Elles sont aussi qcx par rapport à y. En effet $A_X k$ et $B_X k$ sont les bornes supérieures d'une famille de fonctions qcx par rapport à y. En outre si k est semi-continue supérieurement (s.c.s.) en y, alors $A_X k$ et $B_X k$ seront s.c.i. en y.

Pour simplifier notre étude, nous n'introduirons pas explicitement la notion de polaire d'une fonction qcv. Par contre l'opérateur d'inversion de signe θ nous permettra de transformer la fonction qcx-qcv k en une fonction qcv-qcx θk $(\theta k(x, y) = -k(x, y))$, et par suite d'appliquer l'opération de polarité à θk par rapport à la seconde variable $y \in Y$.

$$A_Y \theta k(x, y') = -\operatorname{Inf}\{ -k(x, y) / y \in A(y') \} = \operatorname{Sup}\{ k(x, y) / y \in A(y') \} \tag{3}$$

$$B_Y \theta k(x, y') = -\operatorname{Inf}\{ -k(x, y) / y \in B(y') \} = \operatorname{Sup}\{ k(x, y) / y \in B(y') \} \tag{4}$$

On constate aisément que $A_Y \theta k$ et $B_Y \theta k$ sont qcx et s.c.i. en y' et qcx en x. En outre, si k est s.c.i. en x, alors $A_Y \theta k$ et $B_Y \theta k$ seront elles aussi s.c.i.

en x. On posera aussi : $\forall (x, y) \in X \times Y$

$$\sigma_X k(x, y) = \mathrm{Max}\,[A_{X'} A_X k(x, y),\ B_{X'} B_X k(x, y)]$$

$$= \mathrm{Max}\,[\sup_{x' \in A(x)} \inf_{u \in A(x')} k(u, y),\ \sup_{x' \in B(x)} \inf_{u \in B(x')} k(u, y)]$$

$$\omega_Y k(x, y) = \mathrm{Min}\,[\theta A_{Y'} A_Y \theta k(x, y), \theta B_{Y'} B_Y \theta k(x, y)]$$

$$= \mathrm{Min}\,[\inf_{y' \in A(y)} \sup_{v \in A(y')} k(x, v).\ \inf_{y' \in B(y)} \sup_{v \in B(y')} k(x, v)$$

On obtient alors le résultat suivant :

Pour y fixé (resp. pour x fixé), $\sigma_X k(x, y)$ [resp. $\omega_Y k(x, y)$] est la plus grande minorante qcx et s.c.i. (resp. la plus petite majorante qcv et s.c.s.) de $k(x, y)$, ce qui veut dire : $\sigma_X k(x, y) \leqq k(x, y) \leqq \omega_Y k(x, y)$.

Dorénavant, pour alléger l'écriture, on remplacera les symboles $A_X k$ et $B_X k$ par l'unique symbole $P_X k$ et les ensembles $A(x)$ et $B(x)$ par l'unique ensemble $P(x)$. Ainsi, par exemple, les expressions analytiques (1) et (2) s'écriront de manière unique : $P_X k(x', y) = -\mathrm{Inf}\{k(x, y)/x \in P(x')\}$.

Les applications σ et ω nous suggèrent d'introduire un opérateur de régularisation.

DÉFINITION 5 : Soit une fonction qcx-qcv $k \in \overline{\mathbb{R}}^{X \times Y}$.

On appellera *opération de régularisation* par rapport à la variable $x \in X$, l'opération $\gamma_{X, P}$ définie par : $\gamma_{X, P} k = P_{X'} P_X k$. De même, on notera $\gamma_{Y, P}$ l'opération de régularisation par rapport à la variable y : $\gamma_{Y, P} k = \theta P_{Y'} P_Y \theta k$.

Exposons quelques méthodes pour construire des fonctions qcx-qcv. Soit φ une fonction qcx et s.c.i. de $\overline{\mathbb{R}}^{X' \times Y}$. Notons par ψ_P la fonction qcx et s.c.i. de $\overline{\mathbb{R}}^{X' \times Y'}$ définie par :

$$\psi_P(x', y) = -\mathrm{Inf}\{\varphi(x, y')/(x, y') \in P(x') \times P(y)\}.$$

En utilisant les notations précédentes, on obtient :

$$\psi_P = P_X \theta P_{Y'} \varphi = P_{Y'} \theta P_X \varphi.$$

La polaire projective de φ est alors : $\psi = \mathrm{Min}(\psi_A, \psi_B)$. Comme φ est qcx et s.c.i., on a : $\varphi^{\#\#} = \varphi$. Posons :

$$\varphi_P(x, y') = -\mathrm{Inf}\{\psi_P(x', y)/(x', y) \in P(x) \times P(y')\}.$$

On obtient alors : $\varphi_P = P_{X'} \theta P_Y \psi_P = P_Y \theta P_{X'} \psi_P$ et $\varphi = \mathrm{Max}(\varphi_A, \varphi_B)$.

THÉORÈME 1 : *Les fonctions* $\bar{k}_P = \theta P_{Y'} \varphi_P$ *et* $\underline{k}_P = P_{X'} \psi_P$ *sont qcx-qcv sur* $X \times Y$.

Preuve : Soient $(x, y) \in X \times Y$. $\bar{k}_P(x, y) = \operatorname{Inf}\{\varphi_P(x, y')/y' \in P(y)\}$ donc $\bar{k}_P(x, .)$ est qcv sur Y. Montrons que $\bar{k}_P(., y)$ est qvx sur X. Soient $(u, v) \in X^2$ et $\lambda \in]0, 1[$. Si $\bar{k}_P(u, y) = +\infty$ où $\bar{k}_P(v, y) = +\infty$ alors d'une manière évidente $\bar{k}_P[\lambda u + (1-\lambda) v, y] \leqq \operatorname{Max}[\bar{k}_P(u, y), \bar{k}_P(v, y)]$.

Supposons que $\bar{k}_P(u, y) < +\infty$ et $\bar{k}_P(v, y) < +\infty$.

Considérons deux nombres réels a et b vérifiant : $\bar{k}_P(u, y) < a$ et $\bar{k}_P(v, y) < b$. $\exists (y', z') \in [P(y)]^2$ tels que : $\bar{k}_P(u, y) \leqq \varphi_P(u, y') \leqq a$ et $\bar{k}_P(v, y) \leqq \varphi_P(v, z') \leqq b$. Comme $P(y)$ est un ensemble convexe, $\lambda y' + (1-\lambda) z' \in P(y)$. Sachant que φ_P est qcx,

$$\bar{k}_P[\lambda u + (1-\lambda) v, y] \leqq \varphi_P[\lambda u + (1-\lambda) v, \lambda y' + (1-\lambda) z']$$
$$\leqq \operatorname{Max}[\varphi_P(u, y'), \varphi_P(v, z')] \leqq \operatorname{Max}(a, b).$$

En faisant tendre (a, b) vers $[\bar{k}_P(u, y), \bar{k}_P(v, y)]$, on déduit que $\bar{k}_P(., y)$ est qvx. Quant à l'autre résultat, il suffit de remarquer que ψ_P est qcx sur $X \times Y$ et on emploie le même raisonnement que précédemment. @

LEMME 2 : $P_Y P_{Y'} \varphi_P = \varphi_P$ et $P_X P_{X'}, \psi_P = \psi_P$.

Preuve : Par construction, φ_A (resp. φ_B) est qcx et s.c.i. D'après la remarque 1, elle vérifie la propriété (P1) [resp. (P2)]. Même chose pour ψ. @

NOTATION : $S_P(X \times Y)$ désignera l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{R}^{X \times Y}$ qui sont qcx par rapport aux deux variables et qui vérifient les propriétés suivantes : $f = P_{X'} P_X f$ et $f = P_{Y'} P_Y f$.

THÉORÈME 2 : *Soient* $\varphi \in \overline{\mathbb{R}}^{X \times Y}$ *qcx et s.c.i.,* φ_P *et* ψ_P *construits comme précédemment. Alors pour toute fonction qcx-qcv* k *vérifiant* $\underline{k}_P \leqq k \leqq \bar{k}_P$, *on a :* $\gamma_{X, P} k = \underline{k}_P$, $\gamma_{Y, P} k = \bar{k}_P$, $P_X k = \psi_P$ *et* $P_Y \theta k = \varphi_P$.

Preuve :

$$\gamma_{X, P} \bar{k}_P = P_{X'} P_X \bar{k}_P = P_{X'} P_X \theta P_{Y'} \varphi_P = P_{X'} \psi_P = \underline{k}_P$$

et

$$\gamma_{Y, P} \underline{k}_P = \theta P_{Y'} P_Y \theta \underline{k}_P = \theta P_{Y'} P_Y \theta P_{X'} \psi = \theta P_{Y'} \varphi_P = \bar{k}_P.$$

Par suite $\forall k$ tel que

$$\underline{k}_P \leqq k \leqq \bar{k}_P, \qquad \gamma_{X, P} k = \underline{k}_P \qquad \text{et} \qquad \gamma_{Y, P} k = \bar{k}_P.$$
$$P_X \underline{k}_P = P_X P_{X'} \psi_P = \psi_P$$

et

$$P_X \bar{k}_P = P_X \theta P_{Y'} \varphi_P = \psi_P \quad \Rightarrow \quad P_X k = \psi_P$$

$$P_Y \theta \bar{k}_P = P_Y P_{Y'} \varphi_P = \varphi_P$$

et

$$P_Y \theta \underline{k}_P = P_Y \theta P_{X'} \psi_P = \varphi_P \quad \Rightarrow \quad P_Y \theta k = \varphi_P. \quad @$$

DÉFINITION 6 : Soit $k \in \bar{\mathbb{R}}^{X \times Y}$.

On dira que k est de *type* S_P si k est qcx-qcv et vérifie les deux conditions suivantes : $\gamma_{X,P} \gamma_{Y,P} k = \gamma_{X,P} k$ et $\gamma_{Y,P} \gamma_{X,P} k = \gamma_{Y,P} k$.

THÉORÈME 3 : *Soit $k \in \bar{\mathbb{R}}^{X \times Y}$ de type S_P. Alors il existe deux fonctions quasi-convexes φ_P et ψ_P vérifiant : $P_Y \theta P_{X'} \psi_P = \varphi_P$ et $P_X \theta P_{Y'} \varphi_P = \psi_P$, telles que si l'on pose $\underline{k}_P = P_{X'} \psi_P$ et $\bar{k}_P = \theta P_{Y'} \varphi_P$, on ait $\underline{k}_P \leqq k \leqq \bar{k}_P$. De plus on a : $\underline{k}_P = \gamma_{X,P} k$ et $\bar{k}_P = \gamma_{Y,P} k$. Enfin, $\varphi_P \in S_P(X \times Y')$ et $\psi_P \in S_P(X' \times Y)$.*

Preuve : On posera $k_x = \gamma_{X,P} k$ et $k_y = \gamma_{Y,P} k$ s'il n'y a pas d'ambigüités. On a évidemment $k_x \leqq k \leqq k_y$. Comme k est de type S_P, on a :

$$\gamma_{Y,P} k_x = \gamma_{Y,P} \gamma_{X,P} k = \gamma_{Y,P} k = k_y \qquad \text{et} \qquad \gamma_{X,P} k_y = \gamma_{X,P} \gamma_{Y,P} k = \gamma_{X,P} k = k_x$$

donc $\gamma_{Y,P} k_x = k_y$ et $\gamma_{X,P} k_y = k_x$. Par suite, $\forall k'$ tel que $k_x \leqq k' \leqq k_y$, on a :

$$\gamma_{Y,P} k' = k_y \qquad \text{et} \qquad \gamma_{X,P} k' = k_x.$$

Posons : $P_Y \theta k_x = \varphi_P$ et $P_X k_y = \psi_P$. On obtient :

$$P_X \theta P_{Y'} \varphi_P = P_X \theta P_{Y'} P_Y \theta k_x = P_X \gamma_{Y,P} k_x = P_X k_y = \psi_P$$

et

$$P_Y \theta P_{X'} \psi_P = P_Y \theta P_{X'} P_X k_y = P_Y \theta \gamma_{X,P} k_y = P_Y \theta k_x = \varphi_P.$$

Calculons $\underline{k}_P$ et $\bar{k}_P$:

$$\underline{k}_P = P_{X'} \psi_P = P_{X'} P_X k_y = \gamma_{X,P} k_y = k_x, \; k_P = \theta P_{Y'} \varphi_P = \theta P_{Y'} P_Y \theta k_x = \gamma_{Y,P} k_x = k_y.$$

Par construction φ et ψ sont deux fonctions qcx par rapport aux deux variables. Pour montrer que $\varphi_P \in S_P(X \times Y')$ et $\psi_P \in S_P(X' \times Y)$, il suffit de remarquer que pour toute fonction qcx $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ on a : $P_X P_{X'} P_X f = P_X f$ (*cf.* [1], [2] où la remarque 1). Par conséquent,

$$P_X P_{X'} \psi_P = P_X P_{X'} P_X k_y = P_X k_y = \psi_P$$

et

$$P_Y P_{Y'} \varphi_P = P_Y P_{Y'} P_Y \theta k_x = P_Y \theta k_x = \varphi_P.$$

Comme φ_P et ψ_P peuvent s'écrire aussi de la manière suivante :

$$\varphi_P = P_{X'} \theta P_Y \psi_P \qquad \text{et} \qquad \psi_P = P_{Y'} \theta P_X \varphi_P,$$

on a :

$$P_{X'} P_X \varphi_P = P_{X'} P_X P_{X'} \theta P_Y \psi_P = P_{X'} \theta P_Y \psi_P = \varphi_P$$

et

$$P_{Y'} P_Y \psi_P = P_{Y'} P_Y P_{Y'} \theta P_{X'} \varphi_P = P_{Y'} \theta P_X \varphi_P = \psi_P. \quad @$$

Les théorèmes (2) et (3) suggèrent de construire une classe d'équivalence dont les éléments extrêmes seront $\underline{k}_P$ et $\bar{k}_P$.

DÉFINITION 7 : Soient deux fonctions qcx-qcv k et $k' \in \bar{\mathbb{R}}^{X \times Y}$ et $\mathbb{R}_P$ une relation définie par : $k \mathbb{R}_P k' \Leftrightarrow \gamma_{X,P} k = \gamma_{X,P} k'$ et $\gamma_{Y,P} k = \gamma_{Y,P} k'$.

THÉORÈME 4 : *$\mathbb{R}_P$ est une classe d'équivalence. Si $\underline{k}_P$ et $\bar{k}_P$ sont les fonctions obtenues précédemment, alors*

$$K_P = \{ k \in \bar{\mathbb{R}}^{X \times Y} \text{ qcx-qcv telles que } \underline{k}_P \leqq k \leqq \bar{k}_P \}$$

est une classe d'équivalence.

Preuve : Il est clair que $\mathbb{R}_P$ est une classe d'équivalence. En plus tous les éléments de K_P sont équivalents entre eux. En effet, soient k et $k' \in K_P$. D'après le théorème (2), $\gamma_{X,P} k = \gamma_{X,P} k' = \underline{k}_P$ et $\gamma_{Y,P} k = \gamma_{Y,P} k' = \bar{k}_P$. Supposons que k' soit équivalent à $k \in K_P$. On a donc $\gamma_{X,P} k = \gamma_{X,P} k' = \underline{k}_P$ d'où $\underline{k}_P \leqq k'$. Enfin $\gamma_{Y,P} k = \gamma_{Y,P} k' = \bar{k}_P$ d'où $k' \leqq \bar{k}_P$. On a donc bien $k' \in K_P$. @

Remarque 2 : Toutes les fonctions qcx-qcv k situées entre $\underline{k}_P$ et $\bar{k}_P$ sont de type S_P. Dans toute la suite, nous ne considérerons que des fonctions qui sont de type S_P. Si k est de type S_P, la classe de k est donc l'ensemble K_P des fonctions qcx-qcv k' comprises entre $\underline{k}_P = \gamma_{X,P} k$ et $\bar{k}_P = \gamma_{Y,P} k$.

3. POLAIRES D'UNE FONCTION QUASI-CONVEXE QUASI-CONCAVE

Soit k de type S_P. On notera K_P la classe de k.

(i) Appliquons l'opération de polarité par rapport à la première variable $x \in X$. On obtient une fonction $P_X k \in \bar{\mathbb{R}}^{X' \times Y}$ qui est qcx par rapport aux deux variables. Appliquons ensuite l'opération de polarité par rapport à la seconde variable $y \in Y$ et inversons le signe pour obtenir à nouveau une fonction qcx-qcv définie sur $X' \times Y'$ que l'on notera $k_P^\sharp$ et sera appelée *polaire supérieure* *de k par rapport à P.* On obtient : $k_P^* = \theta P_Y P_X k$ c'est-à-dire

$$k_P^*(x', y') = \operatorname{Inf}\{-\operatorname{Inf}\{k(x, y)/x \in P(x')\}/y \in P(y')\} = -\sup_{y \in P(y')} \inf_{x \in P(x')} k(x, y).$$

(ii) Appliquons maintenant l'opération de polarité par rapport à la seconde variable $y \in Y$ (après avoir inversé le signe). On obtient une fonction $P_Y \theta k \in \overline{\mathbb{R}}^{X \times Y'}$ qui est qcx par rapport aux deux variables. Appliquons ensuite l'opération de polarité par rapport à la première variable $x \in X$. On obtient encore une fonction qcx-qcv définie sur $X' \times Y'$ que l'on notera k_{P*} et sera appelée *polaire inférieure de k par rapport à P.* On obtient : $k_{P*} = P_X P_Y \theta k$ c'est-à-dire

$$k_{P*}(x', y') = -\operatorname{Inf}\{-\operatorname{Inf}\{-k(x, y)/y \in P(y')\}/x \in P(x')\}$$
$$= -\inf_{x \in P(x')} \sup_{y \in P(y')} k(x, y)$$

On a ainsi obtenu deux fonctions qcx-qcv k_P^* et k_{P*} de type S_P dont la seule différence dans leur expression est l'interversion des opérations *Inf* et *Sup.* On a trivialement : $\forall (x', y') \in X' \times Y'\ k_{P*}(x', y') \leqq k_P^*(x', y')$.

DÉFINITION 8 : *L'application* $k^* = \operatorname{Min}(k_A^*, k_B^*)$ [resp. $k_* = \operatorname{Min}(k_{A*}, k_{B*})$] est appelée *polaire projective supérieure* (resp. *inférieure*) de k.

Remarque 3 : On a toujours l'inégalité $k_* \leqq k^*$.

Au théorème (2), à partir de deux fonctions, on a obtenu $\underline{k}_P$ et $\overline{k}_P$ par polarité partielle. On peut recommencer cette construction mais en inversant les rôles de ψ_P et φ_P. A partir de $\varphi_P \in S_P(X \times Y')$ et $\psi_P \in S_P(X' \times Y)$ telles que $\varphi_P = P_{X'} \theta P_Y \psi_P$ et $\psi_P = P_{Y'} \theta P_X \varphi_P$, on posera $\overline{m}_P = \theta P_Y \psi_P$ et $\underline{m}_P = P_X \varphi_P$. On constate alors que $\overline{m}_P = k_P^*$ et $\underline{m}_P = k_{P*}$. En effet $\overline{m}_P = \theta P_Y P_X k = k_P^*$ car $\psi_P = P_X k$ et $\underline{m}_P = P_X P_Y \theta k = k_{P*}$ car $\varphi_P = P_Y \theta k$ (*cf.* théorème 2). Ainsi les éléments k_P^* et k_{P*} sont les éléments extrêmes d'une classe. On notera M_P l'ensemble des fonctions qcx-qcv m définies sur $X' \times Y'$ telles que $\underline{m}_P \leqq m \leqq \overline{m}_P$. Comme les fonctions φ_P et ψ_P sont les mêmes quelle que soit la fonction qcx-qcv que l'on prend dans la classe K_P, il en est de même pour $\underline{m}$ et $\overline{m}$. Ainsi M_P dépend en fait de K_P. On dira que M_P est la classe polaire de K_P et l'on notera $M_P = K_P^*$.

Pour $m \in M_P$ (m est donc de type S_P), on peut définir de la même façon $m_P^* = \theta P_{Y'} P_{X'} m$ et $m_{P*} = P_{X'} P_{Y'} \theta m$, et l'on notera $M_P^* = K_P^{**}$ l'ensemble des fonctions qcx-qcv comprises entre m_{P*} et m_P^*, d'où le résultat suivant.

THÉORÈME 5 : *Soient* $k \in \overline{\mathbb{R}}^{X \times Y}$ *de type* S_P *et* K_P *la classe de* k.

On a alors $K_P^{**}=K_P$. Plus précisément si $\underline{k}_P=\gamma_{X,P}k$ et $\bar{k}_P=\gamma_{Y,P}k$ alors $\forall m\in K_P^*$ (c'est-à-dire vérifiant $k_{P*}\leqq m\leqq k_P^*$), on a : $m_P^*=\bar{k}_P$ et $m_{P*}=\underline{k}_P$.

Preuve : Il suffit de prouver que

$$(k_{P*})^*=k_P^{**}=\bar{k}_P \qquad \text{et} \qquad (k_P^*)_*=k_P^{**}=\underline{k}_P.$$

Soient $\psi_P=P_X\gamma_{Y,P}k$ et $\varphi_P=P_Y\theta\gamma_{X,P}k$. On a alors $\psi_P=P_X\bar{k}_P$ et $\varphi_P=P_Y\theta\,\underline{k}_P$. Comme

$$\underline{k}=\gamma_{X,P}k=\gamma_{X,P}\gamma_{Y,P}k=P_{X'}P_X\gamma_{Y,P}k=P_{X'}\psi_P$$

et

$$\bar{k}_P=\gamma_{Y,P}k=\gamma_{Y,P}\gamma_{X,P}k=\theta\,P_{Y'}P_Y\theta\gamma_{X,P}k=\theta\,P_{Y'}\varphi_P,$$

il s'ensuit que $\psi_P=P_Xk$ et $\varphi_P=P_Y\theta k$ (*cf.* théorème 2), d'où $k_{P*}=P_X\varphi_P$ et $k_P^*=\theta\,P_Y\psi_P$.

(i) En posant $\underline{m}_P=k_{P*}$, on a :

$$\underline{m}_P^*=\theta\,P_{Y'}P_{X'}\underline{m}_P=\theta\,P_{Y'}P_{X'}P_X\varphi_P=\theta\,P_{Y'}\varphi_P=k_P.$$

Si on pose $\bar{m}_P=k_P^*$, alors :

$$\bar{m}_P^*=\theta\,P_{Y'}P_{X'}\bar{m}_P=\theta\,P_{Y'}P_{X'}\theta\,P_Y\psi_P=\theta\,P_{Y'}\varphi_P=\bar{k}_P.$$

Par conséquent $\forall m$ tel que $\underline{m}_P\leqq m\leqq\bar{m}_P: m_P^*=\bar{k}_P$.

(ii) $\bar{m}_{P*}=P_X P_{Y'}\theta\bar{m}_P=P_{X'}P_{Y'}\theta\theta\,P_Y\psi_P=P_{X'}\psi_P=\underline{k}_P$. Enfin

$$\begin{aligned}\underline{m}_{P*}=P_{X'}P_{Y'}\theta\,\underline{m}_P \quad &\Rightarrow \quad \underline{m}_{P*}=P_{X'}P_{Y'}\theta\,P_X\varphi_P\\ &\qquad =P_{X'}\psi_P=\underline{k}_P \quad \Rightarrow \quad \forall m:\underline{m}_P\leqq m\leqq\bar{m}_P, m_{P*}=\underline{k}_P. \quad @\end{aligned}$$

Application. Problème quasi-convexe quasi-concave

Soient $h\in\bar{\mathbb{R}}^{X\times Y}$ une fonction qcx-qcv et $(u', v')\in X'\times Y'$. Posons :

$$f(x)=\mathrm{Max}[\sup_{y\in A(v')}h(x,y),\ \sup_{y\in B(v')}h(x,y)]$$

et

$$g(y)=\mathrm{Min}[\inf_{x\in A(u')}h(x,y),\ \inf_{x\in B(u')}h(x,y)].$$

Prenons

$$(u', v')=(0, 0): f(x)=\mathrm{Max}[-\infty, \sup_{y\in Y}h(x,y)]=\sup_{y\in Y}h(x,y)$$

et

$$g(y)=\operatorname{Min}[+\infty, \operatorname*{Inf}_{x\in X} h(x, y)]=\operatorname*{Inf}_{x\in X} h(x, y).$$

DÉFINITION 9 : Soit $h\in\overline{\mathbb{R}}^{X\times Y}$. Au triplet $[h, X, Y]$ on associe les deux problèmes :

(P) $$a=\operatorname*{Inf}_{x\in X} f(x) \quad \text{avec} \quad f(x)=\operatorname*{Sup}_{y\in Y} h(x, y)$$

(Q) $$b=\operatorname*{Sup}_{y\in Y} g(x) \quad \text{avec} \quad g(y)=\operatorname*{Inf}_{x\in X} h(x, y).$$

On conviendra d'appeler (P) le *problème primal* et (Q) le *problème dual.*

A partir de maintenant, P_X représentera uniquement l'opération B_X et $P(x)$ l'ensemble $B(x)$. De même, on écrira $(k, S, \varphi, \psi, \ldots)$ au lieu de $(k_P, S_P, \varphi_P, \psi_P, \ldots)$.

THÉORÈME 6 : *Soient les fonctions* φ, ψ, $\underline{k}$ *et* $\bar{k}$ *vérifiant les hypothèses du théorème* (2). *Alors toutes les fonctions qcx-qcv* k *vérifiant* $\underline{k}\leqq k\leqq\bar{k}$, *ont les mêmes problèmes primal et dual associés.*

Preuve : Soit k arbitraire vérifiant $\underline{k}\leqq k\leqq\bar{k}$. On a :

$$f(x)=\operatorname{Sup}\{k(x, y)/y\in Y\}=P_Y\theta k(x, 0_{Y'}).$$

En effet :

$$P_Y\theta k(x, 0_{Y'})=-\operatorname{Inf}\{-k(x, y)/y\in P(0_{Y'})\}.$$

Comme $P(0_{Y'})=Y$, il s'ensuit que $f(x)=P_Y\theta k(x, 0_{Y'})=\varphi(x, 0_{Y'})$. De même $\theta P_X k(0_{X'}, y)=\operatorname{Inf}\{k(x, y)/x\in P(0_{X'})\}$. Comme $P(0_{X'})=X$, il s'ensuit que $g(x)=\theta P_X k(0_{X'}, y)=-\psi(0_{X'}, y)$.

On constate que pour tout k vérifiant $\underline{k}\leqq k\leqq\bar{k}$, on a les mêmes fonctions f en g, donc les mêmes problèmes primal et dual. @

DÉFINITION 10 : On dit que le *triplet* $[h, X, Y]$ *a une valeur* v si l'on a l'égalité suivante :

$$v=\operatorname*{Sup}_{y\in Y}\operatorname*{Inf}_{x\in X} h(x, y)=\operatorname*{Inf}_{x\in X}\operatorname*{Sup}_{y\in Y} h(x, y).$$

THÉORÈME 7 : *Soient* $k\in\overline{\mathbb{R}}^{X\times Y}$ *de type S et K la classe de k. Le triplet* $[k, X, Y]$ *a une valeur v si et seulement si* $k_*(0_{X'}, 0_{Y'})=k^*(0_{X'}, 0_{Y'})$ *c'est-à-dire que toutes les fonctions* $m\in K^*$ *prennent la même valeur en* $(0_{X'}, 0_{Y'})\in X'\times Y'$.

Preuve : On a : $k^* = \theta P_Y P_X k$ et $k_* = P_X P_Y \theta k$, c'est-à-dire :

$$k_*(0_{X'}, 0_{Y'}) = -\operatorname{Inf}\{\operatorname{Sup}\{k(x, y)/y \in Y\}/x \in P(0_{X'})\}$$
$$= -\operatorname*{Inf}_{x \in X} \operatorname*{Sup}_{y \in Y} k(x, y) = -a$$

$$k^*(0_{X'}, 0_{Y'}) = \operatorname{Inf}\{-\operatorname{Inf}\{k(x, y)/x \in X\}/y \in P(0_{Y'})\}$$
$$= -\operatorname*{Sup}_{y \in Y} \operatorname*{Inf}_{x \in X} k(x, y) = -b. \quad @.$$

Remarque 4 : On ne peut trouver de résultats pareils si on remplace P_X par A_X et l'ensemble $P(x)$ par $A(x)$ car $A(0_{X'}) = A(0_{Y'}) = \varnothing$.

DÉFINITION 11 : On dit que $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ est un *point de selle* du triplet $[h, X, Y]$ si l'on a : $h(\tilde{x}, y) \leqq h(\tilde{x}, \tilde{y}) \leqq h(x, \tilde{y})$ $\forall (x, y) \in X \times Y$ c'est-à-dire : $\operatorname*{Sup}_{y \in Y} h(\tilde{x}, y) = h(\tilde{x}, \tilde{y}) = \operatorname*{Inf}_{x \in X} h(x, \tilde{y})$.

THÉORÈME 8 : *Soient* $k \in \overline{\mathbb{R}}^{X \times Y}$ *de type* S, $\varphi = P_X \theta k \in S(X \times Y')$ *et* $\psi = P_X k \in S(X' \times Y)$. *Le couple* $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ *est point de selle de* $[k, X, Y]$ *si et seulement si* $\varphi(\tilde{x}, 0_{Y'}) + \psi(0_{X'}, \tilde{y}) = 0$.

Preuve. — D'après la définition du point de selle, on a :

$$f(\tilde{x}) = \operatorname*{Sup}_{y \in Y} k(\tilde{x}, y) = k(\tilde{x}, \tilde{y}) = \operatorname*{Inf}_{x \in X} k(x, \tilde{y}) = g(\tilde{y}).$$

Or

$$g(\tilde{y}) = \theta P_X k(0_{X'}, \tilde{y}) = -\psi(0_{X'}, \tilde{y})$$

et

$$f(\tilde{x}) = P_Y \theta k(\tilde{x}, 0_{Y'}) = \varphi(\tilde{x}, 0_{Y'}),$$

d'où le résultat suivant : $\varphi(\tilde{x}, 0_{Y'}) + \psi(0_{X'}, \tilde{y}) = 0$. @

De nombreux auteurs se sont intéressés à la recherche de conditions suffisantes caractérisant les points de selle (*cf.* [3], [5], [6], [7], ...).

4. SOUS-DIFFERENTIEL D'UNE FONCTION QCX-QCV

Soit $k \in \overline{\mathbb{R}}^{X \times Y}$ de type S. Pour chaque y fixé dans Y, la fonction : $x \mapsto k(x, y)$ est qcx. On notera $\partial_X k(x, y)$ son sous-différentiel en x. C'est une partie (éventuellement vide) de X'. De même, pour chaque x fixé dans X, la fonction : $y \mapsto -k(x, y)$ est qcx. On notera $\partial_Y k(x, y)$ son sous-différentiel en y. C'est une partie (éventuellement vide) de Y'.

DÉFINITION 12 : Soit $k \in \bar{\mathbb{R}}^{X \times Y}$ de type S.

L'ensemble $\partial k(x, y) = \partial_X k(x, y) \times \partial_Y k(x, y)$ est appelé le *sous-différentiel de k au point* (x, y). C'est une partie éventuellement vide de $X' \times Y'$.

THÉORÈME 9 : *Soient* $k \in \bar{\mathbb{R}}^{X \times Y}$ *de type* S, $\varphi = P_Y \theta k$ *et* $\psi = P_X k$. $(x', y') \in \partial k(x, y) \Leftrightarrow \varphi(x, y') + \psi(x', y) = 0$ *et* $(x', y') \in P(x) \times P(y)$.

Preuve : Il suffit d'utiliser la définition (4). En effet :

$$x' \in \partial_X k(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad x' \in P(x) \quad \text{et} \quad P_X k(x', y) + k(x, y) = 0$$

$$y' \in \partial_Y k(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad y' \in P(y) \quad \text{et} \quad P_Y \theta k(x, y') + \theta k(x, y) = 0.$$

$$k \text{ est de type } S \quad \Rightarrow \quad \varphi \in S(X \times Y') \quad \text{et} \quad \psi \in S(X' \times Y).$$

Ainsi

$$(x', y') \in \partial k(x, y) \quad \Rightarrow \quad (x', y') \in P(x) \times P(y)$$

et

$$P_Y \theta k(x, y') + P_X k(x', y) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(x', y') \in \partial k(x, y) \quad \Rightarrow \quad (x', y') \in P(x) \times P(y)$$

et

$$\varphi(x, y') + \psi(x', y) = 0. \tag{5}$$

Inversement supposons que

$$\varphi(x, y') + \psi(x', y) = 0 \quad \text{et} \quad (x', y') \in P(x) \times P(y).$$

Par définition,

$$-\psi(x', y) = \operatorname{Inf}\{k(u, y)/u \in P(x')\}.$$

Comme $x' \in P(x) \Rightarrow x \in P(x')$ on déduit l'inégalité suivante : $\psi(x', y) + k(x, y) \geqq 0$.

De même,

$$-\varphi(x, y') = \operatorname{Inf}\{-k(x, v)/v \in P(y')\}.$$

Comme $y' \in P(y) \Rightarrow y \in P(y')$, on déduit l'inégalité suivante :

$$\varphi(x, y') + \theta k(x, y) \geqq 0.$$

Et d'après (5), on déduit que :

$$\psi(x', y)+k(x, y)=0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(x, y')+\theta k(x, y)=0. \quad @$$

THÉORÈME 10 : *Soient $k \in \bar{\mathbb{R}}^{X \times Y}$ de type S, K la classe de k et $m \in M = K^*$. Alors $(x', y') \in \partial k(x, y) \Leftrightarrow (x, y) \in \partial m(x', y')$.*

Preuve : Soit

$$m \in M . \underline{m} \leqq m \leqq \bar{m} \Rightarrow \theta \bar{m} \leqq \theta m \leqq \theta \underline{m} \quad \Rightarrow \quad P_{Y'} \theta \underline{m} \leqq P_{Y'} \theta m \leqq P_{Y'} \theta \bar{m}$$

$$(\text{resp. } P_{X'} \bar{m} \leqq P_{X'} m \leqq P_{X'} \underline{m}).$$

Comme

$$P_{Y'} \theta \bar{m} = P_{Y'} \theta\theta P_Y \psi = P_{Y'} P_Y \psi = \psi \qquad \text{et} \qquad P_{Y'} \theta \underline{m} = P_{Y'} \theta P_X \varphi = \psi$$

$$(\text{resp. } P_{X'} \bar{m} = P_{X'} \theta P_Y \psi = \varphi \text{ et } P_{X'} \underline{m} = P_{X'} P_X \varphi = \varphi),$$

on déduit que $P_{Y'} \theta m = \psi \in S(X' \times Y)$ (resp. $P_{X'} m = \varphi \in S(X \times Y')$). Il suffit d'appliquer le théorème précédent et la définition (4) à m :

$$(x', y') \in \partial k(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(x, y') + \psi(x', y) = 0 \quad \text{et} \quad (x', y') \in P(x) \times P(y).$$

$$\Leftrightarrow \quad P_{X'} m(x, y') + P_{Y'} \theta m(x', y) = 0 \quad \text{et} \quad (x, y) \in P(x') \times P(y').$$

Or

$$P_{X'} m(x, y') + m(x', y') + \theta m(x', y') + P_{Y'} \theta m(x', y)$$

$$= P_{X'} m(x, y') + P_{Y'} \theta m(x', y) = 0$$

et comme on a toujours

$$P_{X'} m(x, y') + m(x', y') \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad \theta m(x', y') + P_{Y'} \theta m(x', y) \geqq 0$$

on déduit que

$$P_{X'} m(x, y') + m(x', y') = 0 \qquad \text{et} \qquad \theta m(x', y') + P_{Y'} \theta m(x', y) = 0$$

ce qui est équivalent à $(x, y) \in \partial m(x', y')$. @

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Atteia et A. Elqortobi, Quasi-Convex Duality, *Lectures Notes in Control and Inform. Sci. Optimization and Optimal Control*, 1980, *30*, p. 16-22.
2. A. Elqortobi, Thèse de 3e cycle, N° d'ordre 2312, Université Paul-Sabatier, Toulouse, 1980.
3. P. J. Laurent, Fonctions convexes et problèmes de Minimax. *Séminaire d'Analyse Numérique*, Grenoble, 1972.
4. P. J. Laurent, Approximation et Optimization, *Hermann*, Paris.
5. L. McLinden, A Minimax Theorem, *Math. Op. Res.*, nov. 1984, *9*, n° 4.
6. H. Nikaido, On Von Neumann's Minimax Theorem, *Pacific J. Math.*, 1954, *4*, p. 65-72.
7. U. Passy et E. Z. Prisman, Saddle-functions and min-max problem. The Quasi-Convexe Quasi-Concave Case, Mimeograph series n° 299, *Faculty of Industrial Engineering and Management*, Technio, Haifa, Israel, 1981.
8. R. T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton, 1970.
9. M. Sion, On General Minimax Theorems, *Pacific J. Math.*, 1958, *8*, p. 171-176.
10. M. Volle, Conjugaison par tranches, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1985, IV, *139*, p. 279-312.