

ABDELKADER ELQORTOBI

**Inf-convolution quasi-convexe des  
fonctionnelles positives**

*Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche  
opérationnelle. Recherche opérationnelle*, tome 26, n° 4 (1992),  
p. 301-311.

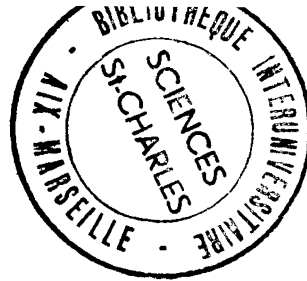
[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1992\\_\\_26\\_4\\_301\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1992__26_4_301_0)

© AFCET, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



2

## INF-CONVOLUTION QUASI-CONVEXE DES FONCTIONNELLES POSITIVES (\*)

par Abdelkader ELQORTOBI <sup>(1)</sup>

Communiqué par J.-P. CROUZEIX

---

Résumé. — *L'inf-convolution convexe joue un rôle prépondérant en analyse convexe. Elle est étroitement liée à la conjuguée convexe d'une fonctionnelle. C'est pourquoi on va utiliser la définition de l'inf-convolution quasi-convexe pour définir notre polaire qui se trouve avoir un rapport avec celles définies par Crouzeix d'une part et Greenberg & Pierskalla (G & P) d'autre part. On définira son quasi-tangentiel et on terminera par un exemple : la « surrogate dualité ».*

Mots clés : Optimisation; quasi-convexe; quasi-tangentiel; inf-convolution.

Abstract. — *The infimal convolution has an important role in convex analysis. It is closely related to a polar of a convex function. We use the definition of a quasiconvex infimal convolution to define our polar which is related to the polars defined respectively by Crouzeix and Greenberg & Pierskalla (G & P). In this work, we shall define its quasi-tangential and we shall end by an example: the "surrogate duality".*

Keywords : Optimization; quasiconvexity; quasi-tangential; infimal convolution.

### 1. INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit,  $X$  et  $X'$  désignent deux espaces vectoriels topologiques localement convexes mis en dualité séparante par la forme bilinéaire notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $\mathbb{P} = \{ f: X \rightarrow [0, +\infty] \}$  et  $\mathbb{F}$  sera l'ensemble  $\bar{R}^X = \{ f: X \rightarrow [-\infty, +\infty] \}$ . On prendra soin de prolonger l'addition des réels à  $\bar{R} = [-\infty, +\infty]$  de la manière suivante:  $a + (+\infty) = +\infty$  pour tout  $a$  appartenant à  $[-\infty, +\infty]$  (cf. [7]). Rappelons les principales définitions.

---

(\*) Reçu en mai 1991.

(<sup>1</sup>) Département de mathématiques et d'informatique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke (Québec), Canada.

L'épigraphe strict de  $f$  noté est  $(f)$  est l'ensemble

$$\text{est } (f) = \{ (x, \lambda) \in X \times R : f(x) < \lambda \}$$

et les tranches ou sections de  $f$  sont les ensembles suivants

$$T(f, \lambda) = \{ x \in X : f(x) \leq \lambda \} \quad \text{et} \quad t(f, \lambda) = \{ x \in X : f(x) < \lambda \} \text{ où } \lambda \text{ est réel.}$$

La conjuguée convexe de  $f$  est définie par

$$f^*(x') = \text{Sup} \{ \langle x, x' \rangle - f(x) : x \in X \}$$

Enfin on dira que  $f$  est propre si le domaine effectif de  $f$  est non vide et si  $f$  est finie sur ce domaine. L'inf-convolution convexe de deux fonctionnelles  $f$  et  $g$  introduite par Moreau (cf. [7]) est :

$$f \Delta g (z) = \text{Inf} \{ f(x) + g(z - x) : x \in X \}$$

La loi  $\Delta$  vérifie l'égalité :  $\text{est } (f \Delta g) = \text{est } (f) + \text{est } (g)$

Remplaçons  $g$  par un élément  $x'$  de  $X'$ . On obtient

$$\begin{aligned} f \Delta x' (z) &= \text{Inf} \{ f(x) + \langle z - x, x' \rangle : x \in X \} \\ &= - \text{Sup} \{ \langle x - z, x' \rangle - f(x) : x \in X \} = \langle z, x' \rangle - f^*(x') \end{aligned}$$

Si on pose  $f_z^*(x') = \langle z, x' \rangle - f^*(x')$  pour  $z$  fixé appartenant à  $X$ , alors on déduit facilement les propriétés suivantes :

- (i)  $f_z^*(0) = \text{Inf } f$  et  $-f_0^* = f^*$
- (ii)  $\text{Sup} \{ f_z^*(x') : x' \in X' \} = f^{**}(z) = \text{Sup} \{ f \Delta x' (z) : x' \in X' \}$
- (iii)  $-f_z^*$  est convexe (cx) et semi-continue inférieurement (sci).

On va utiliser cette approche pour définir notre polaire en utilisant l'inf-convolution quasi-convexe (qcx). Cette contribution originale s'ajoute à celles déjà existantes. On rappelle que Crouzeix et Greenberg & Pierskalla utilisent, chacun à leur manière, une décomposition de  $f^*$  pour définir leur conjuguée (cf. [3], [4]). Dans [1], les auteurs appliquent deux polarités particulières aux tranches de fonctions pour définir leur conjuguée. Passy & Prisman utilisent les fonctions homogènes et la notion de «evenly» convexe pour définir une conjugaison symétrique. Dans [12], Volle a généralisé toutes ces notions. Pour d'autres approches, on pourra consulter par exemple [6], [9], [11], etc.

Dans tout ce qui suit, on utilisera la notation suivante :  $\text{Max } (a, b) = a \vee b$

2. PROPRIÉTÉS DE L'INF-CONVOLUTION QUASI-CONVEXE

L'inf-convolution quasi-convexe introduite par Rockafellar (cf. [10]) est définie comme suit :

$$f \nabla g(z) = \text{Inf} \{ f(x) \vee g(z-x) : x \in X \}$$

On a l'importante égalité :

$$t(f \nabla g, \lambda) = t(f, \lambda) + t(g, \lambda) \quad \text{pour tout } \lambda \text{ réel}$$

Remarquons que si on remplace la fonction  $g$  par la fonction nulle, on obtient

$$f \nabla 0(z) = \text{Inf} \{ f(x) \vee 0 : x \in X \}$$

ce qui ne correspond pas en général à  $\text{Inf } f$ . Pour pallier à cet inconvénient, il suffira de considérer des fonctionnelles positives.

Avant de définir notre fonction polaire, étudions quelques propriétés de l'opération  $\nabla$  et rappelons certaines définitions relatives à la quasi-convexité.

$f$  est quasi-convexe (qcx) si  $f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq f(u) \vee f(v)$  pour tout  $(u, v, \lambda)$  appartenant à  $X \times X \times [0, 1]$ ,  $f$  est quasi-concave (qcv) si  $-f$  est quasi-convexe.

On a aussi le résultat suivant :  $f$  est qcx  $\Leftrightarrow$  les ensembles  $T(f, \lambda)$  ou  $t(f, \lambda)$  sont convexes pour tout  $\lambda$  réel.

L'opération  $\nabla$  conserve la convexité et la quasi-convexité des fonctionnelles (cf. [10]) autrement dit

$$\begin{aligned} f \text{ et } g \text{ convexe} &\Rightarrow f \nabla g \text{ convexe} \\ f \text{ et } g \text{ quasi-convexe} &\Rightarrow f \nabla g \text{ quasi-convexe} \end{aligned}$$

THÉORÈME 1 : Soient  $A$  et  $B$  des ensembles non vides,  $f$  et  $g$  des fonctionnelles appartenant à  $\bar{R}^X$ . Désignons par  $\delta_A$  la fonction indicatrice de l'ensemble  $A$ .

- (1)  $\nabla$  est commutative et associative.
- (2) (i)  $\text{dom } f \nabla g = \text{dom } f + \text{dom } g$ ; (ii)  $\delta_A \nabla \delta_B = \delta_{A+B}$ .
- (3)  $f \nabla \delta_{\{x\}}(z) = f(z-x) \vee 0$ . Si  $f$  est positive alors  $f \nabla \delta_{\{x\}}(z) = f(z-x)$ . On remarque alors que pour tout  $\mu$  positive  $t(f \nabla \delta_{\{z\}}, \mu) = t(f, \mu) + \{z\}$ .
- (4)  $f \leq g \Rightarrow f \nabla h \leq g \nabla h$  pour toute fonctionnelle  $h$ .
- (5)  $\text{Inf} \{ f_i \nabla g_j : (i, j) \in I \times J \} = \text{Inf} \{ f_i : i \in I \} \nabla \text{Inf} \{ g_j : j \in J \}$  pour toutes familles de fonctions  $(f_i)$  et  $(g_j)$ .
- (6) Soit  $N$  une norme sur  $X$ . Si  $d(z, A)$  désigne la distance de  $z$  à  $A$ , alors :

$$N \nabla \delta_A(z) = \text{Inf} \{ N(z-x) : x \in A \} = d(z, A).$$

(7) Soit  $f$  positive.  $f \nabla \delta_{-A}(z) = \text{Inf} \{f(x) : x \in A + z\}$  et en particulier  $f \nabla \delta_{-A}(0) = \text{Inf} \{f(x) : x \in A\}$ .

*Preuve:* Immédiat. @

DÉFINITION 1 : Soit  $f$  appartenant à  $\mathbb{F}$ . On dit que  $f$  est inf-compacte si pour tout  $\mu$  réel l'ensemble  $T(f, \mu)$  est compact.

THÉORÈME 2 : Soient  $f$  et  $g$  deux éléments propres de  $\mathbb{F}$  telles que  $f$  soit inf-compacte et  $g$  soit sci. Alors  $f \nabla g$  est sci, bornée inférieurement et  $\nabla$  est exacte.

*Preuve.* — Par construction de la fonction  $f \nabla g$ , on a :

$$T(f \nabla g, \mu) = \bigcap \{ T(f, \beta) + T(g, \beta) : \beta > \mu \}$$

Comme  $T(f, \beta)$  est compact et que  $T(g, \beta)$  est fermé, il s'ensuit que  $T(f \nabla g, \mu)$  est fermé, par conséquent  $f \nabla g$  est sci.

Comme  $\text{Inf } f \leq f \nabla g(z)$  pour tout  $z$  appartenant à  $X$  et que  $f$  est inf-compacte (donc minorée), on déduit que  $f \nabla g$  est bornée inférieurement.

La fonction  $k : x \rightarrow f(x) \vee g(z-x)$  est sci comme maximum de deux fonctions sci. En plus le fermé  $T(k, \beta)$  est inclus dans le compact  $T(f, \beta)$ . Par conséquent la fonction  $k$  est inf-compacte et donc minorée. Elle admet donc un minimum sur  $X$  non égal à  $-\infty$ . L'inf-convolution est donc exacte c'est-à-dire  $f \nabla g(z) = \text{Min} \{f(x) \vee g(z-x) : x \in X\}$  pour tout  $z$  appartenant à  $X$  (autrement dit il existe  $u$  et  $v$  appartenant à  $X$  tels que  $u+v=z$  et  $f \nabla g(z) = f(u) \vee g(v)$ ). @

Remarque 1 : Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctionnelles propres et inf-compactes de  $\mathbb{F}$ , alors  $f \nabla g$  est également propre et inf-compacte. Ceci est une conséquence directe de l'expression de  $T(f \nabla g, \mu)$  vue précédemment.

### 3. POLAIRE D'UNE FONCTIONNELLE

DÉFINITION 2 : Soit  $f$  une fonction positive. La fonction polaire de  $f$  en un point  $z$  appartenant à  $X$  est définie par :

$$F_z(x') = \text{Inf} \{f(x) \vee \langle z-x, x' \rangle : x \in X\} = f \nabla x'(z) \text{ pour tout } x' \text{ appartenant à } X'$$

On posera aussi :

$$f^E(z) = \text{Sup} \{F_z(x') : x' \in X'\} = \text{Sup} \{f \nabla x'(z) : x' \in X'\}$$

*Remarque 2 :*

(i) La fonction  $F_z$  est obtenue de la définition de l'inf-convolution quasi-convexe et vérifie  $F_z(0) = \text{Inf } f$ ,

(ii) La fonction  $F_z$  dépend de  $z$ ; cependant on la notera souvent  $F$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Rappelons l'expression des polaires  $q^C$  et  $q^G$  en un point  $z$  définies respectivement par Crouzeix et G & P (cf. [3], [4]):

$$q^C(z, x') = \text{Inf} \{ \lambda : \text{Inf} \{ \langle z - x, x' \rangle : f(x) \leq \lambda \} \leq 0 \}$$

$$q^G(z, x') = \text{Inf} \{ f(x) : \langle z - x, x' \rangle \leq 0 \}$$

Étudions maintenant les propriétés des fonctions  $F_z$  et  $f^E$ .

**THÉORÈME 3 :** *Soient  $f$  et  $g$  des fonctionnelles positives.*

(1)  $f \leq g \Rightarrow F \leq G \Rightarrow f^E \leq g^E$

(2) Si on pose  $h = \mu f$  pour tout  $\mu > 0$ , alors  $H(x') = \mu F(x'/\mu)$

(3) (i)  $F_z(x') \leq f(z)$  pour tout  $(z, x')$  appartenant à  $X \times X'$ ; (ii)  $f^E \leq f$

(4) (i)  $f = \text{Sup } f_i \Rightarrow \text{Sup } F_i \leq F$  pour toute famille de fonctions positives  $f_i$ ;

(ii)  $f = \text{Inf } f_i \Rightarrow \text{Inf } F_i = F$  pour toute famille de fonctions positives  $f_i$

(5)  $t(F_z, \mu) = \bigcup_{x \in t(f, \mu)} \{ x' \in X' : \langle z - x, x' \rangle < \mu \}$

(6)  $T(f \nabla x', \mu) = \bigcap_{\lambda > \mu} \{ z \in X : \langle z, x' \rangle \leq \lambda + \delta_{t(f, \lambda)}^*(x') \}$

(7)  $T(f^E, \mu) = \bigcap_{x' \in X'} \bigcap_{\lambda > \mu} \bigcup_{\langle x, x' \rangle < \lambda} t(f \nabla \delta_{\{z\}, \lambda})$

*Preuve :* (1), (2), (3), (4) et (5) sont immédiats.

$$(6) \quad \{ z : \langle z, x' \rangle \leq \lambda + \delta_{t(f, \lambda)}^*(x') \}$$

$$= \bigcap \{ \{ z : \langle z, x' \rangle < \lambda + \varepsilon + \delta_{t(f, \lambda)}^*(x') \} : \varepsilon > 0 \}$$

$$= \bigcap \{ \{ z : \text{Inf} \{ f(x) + \varepsilon \vee \langle z - x, x' \rangle : x \in X \} < \lambda + \varepsilon \} : \varepsilon > 0 \}$$

Par conséquent

$$\bigcap_{\lambda > \mu} \{ z \in X : \langle z, x' \rangle \leq \lambda + \delta_{t(f, \lambda)}^*(x') \}$$

$$= \bigcap_{\lambda > \mu} \bigcap_{\varepsilon > 0} \{ z : \text{Inf} \{ f(x) + \varepsilon \vee \langle z - x, x' \rangle : x \in X \} < \lambda + \varepsilon \}$$

$$= \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\lambda > \mu} \{ z : \text{Inf} \{ f(x) + \varepsilon \vee \langle z - x, x' \rangle : x \in X \} < \lambda + \varepsilon \}$$

$$= \bigcap \{ \{ z : \text{Inf} \{ f(x) + \varepsilon \vee \langle z - x, x' \rangle : x \in X \} \leq \mu + \varepsilon \} : \varepsilon > 0 \}$$

$$(7) \quad T(f^E, \mu) = \bigcap_{\lambda > \mu} \{z \in X : f^E(z) < \lambda\} = \bigcap_{\lambda > \mu} \bigcap_{x' \in X'} \{z \in X : F_z(x') < \lambda\}$$

$$= \{z \in X : \text{Inf} \{f(x) \vee \langle z-x, x' \rangle : x \in X\} \leq \mu\} = T(f \nabla x', \mu)$$

Or pour  $x'$  fixé,

$$F_z(x') < \lambda \Leftrightarrow \exists x \in X \quad \text{tel que } f(x) < \lambda \quad \text{et} \quad \langle z-x, x' \rangle < \lambda$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in X \quad \text{tel que } f(z-x) < \lambda \quad \text{et} \quad \langle x, x' \rangle < \lambda$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in X \quad \text{tel que } z \in t(f, \lambda) + \{x\} \quad \text{et} \quad \langle x, x' \rangle < \lambda$$

Par suite

$$\{z \in X : F_z(x') < \lambda\} = \bigcup_{\langle x, x' \rangle < \lambda} t(f, \lambda) + \{x\} = \bigcup_{\langle x, x' \rangle < \lambda} t(f \nabla \delta_{\langle z, \cdot \rangle}, \lambda). \quad @$$

THÉORÈME 4 : Soit  $f \in \bar{R}^X$ .

- (i)  $F$  est quasi-concave et semi-continue supérieurement (scs) par rapport à  $x'$ .
- (ii)  $F$  est quasi-concave, quasi-convexe et semi-continue inférieurement (sci) par rapport à  $z$ .

Preuve :

- (i) Immédiat d'après Théorème 3, 5.
- (ii) D'après Théorème 3, 6,  $F$  est qcx et sci.

Pour prouver que  $F$  est qcv et scs, il suffit de considérer la fonctionnelle

$$\varphi_x(x', z) = f(x) \vee \langle z-x, x' \rangle \text{ pour } x \text{ fixé dans } X$$

qui, pour  $x$  et  $x'$  fixés, est qcv et scs en  $z$  d'où  $F$  est qcv et scs comme infimum de fonctions qcv et scs. @

COROLLAIRE 2 :  $f^E$  est qcx et sci par rapport à  $z$ .

Preuve :  $f^E$  est la borne supérieure d'une famille de fonctions qcx et sci. @

THÉORÈME 5 : Soient  $f$  qcx appartenant à  $P$  et  $z$  appartenant à  $X$ . Si  $f$  est sci en  $z$  alors  $f^E(z) = f(z)$ .

Preuve : Il suffit de prouver que  $f^E(z) \geq f(z)$ .

(a) Supposons que  $f(z) = \text{Inf} f$ . En prenant  $x' = 0$ , on obtient :

$$f^E(z) \geq \text{Inf} \{f(x) \vee \langle z-x, 0 \rangle : x \in X\} = \text{Inf} f = f(z).$$

(b) Supposons que  $\text{Inf} f < f(z)$ . Soit  $\lambda$  tel que  $\text{Inf} f < \lambda < f(z)$ . Puisque  $f$  est sci en  $z$ , il existe un voisinage convexe ouvert  $V$  de  $z$  tel que pour tout  $v$  appartenant à  $V$ ,  $\lambda < f(v)$ . Par suite  $V \cap T(f, \lambda) = \emptyset$ . D'après un théorème de séparation de Hahn-Banach (cf. [5]), il existe un hyperplan fermé qui les sépare. Plus précisément,

$$\exists x' \neq 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in T(f, \lambda), \lambda \leq \langle z - x, x' \rangle$$

et

$$\forall x \in V \quad \langle z - x, x' \rangle \leq \lambda \quad \text{car} \quad 0 \in V.$$

Il s'ensuit que

$$\lambda \leq \text{Inf} \{ \text{Max}(f(x), \langle z - x, x' \rangle) : x \in T(f, \lambda) \}$$

et

$$\lambda \leq \text{Inf} \{ \text{Max}(f(x), \langle z - x, x' \rangle) : x \notin T(f, \lambda) \}.$$

On obtient donc  $\lambda \leq F_z(x')$  et par conséquent  $\lambda \leq f^E(z)$  pour tout  $\lambda$  vérifiant  $\lambda < f(z)$  ce qui veut dire que  $f(z) \leq f^E(z)$ . @

**COROLLAIRE 3 :** Soit  $f$  appartenant à  $P$ . Alors  $f^{EE} = f^E$

*Preuve :* Il suffit de poser  $g = f^E$  et d'employer le théorème précédent à  $g$ . @

*Remarque 3 :* On vérifie aisément les inégalités suivantes (cf. [3]) :

$$f^E(z) \leq f_{q_i}(z) = \text{Sup} q^C(z, x') \leq f^{GG}(z) = \text{Sup} q^G(z, x') \leq f_q(z) \leq f(z)$$

où la fonctionnelle  $f_{q_i}$  (resp.  $f_q$ ) est la plus grande minorante qcx et sci (resp. qcx) de  $f$ .

**COROLLAIRE 4 :** Soit  $f$  appartenant à  $P$ .  $f^E$  est la plus grande minorante qcx et sci de  $f$ , autrement dit elle coïncide avec  $f_{q_i}$ .

*Preuve :* Soit  $g$  une minorante qcx et sci de  $f$ . On déduit que  $g^E \leq f^E$ . D'après le théorème précédent,  $g^E = g$  d'où  $g \leq f^E$ . @

*Exemple :* Prenons l'exemple cité dans [4] : soit  $\lambda \in [0, 1]$  et  $f(x) = 0$  si  $x < 0$ ,  $\lambda$  si  $x = 0$  et 1 sinon. Suivant la valeur  $\lambda$ , on peut rendre  $f$  sci ou non.

(a) Pour  $0 < z$ ,  $F_z(x') = 1$  si  $zx' \geq 1$ ,  $zx'$  si  $0 < zx' < 1$  et 0 sinon

(b) Pour  $0 \geq z$ ,  $F_z(x') = 0$ .

On obtient alors :  $f^E(z) = 0$  si  $z \leq 0$  et 1 sinon.



## 4. QUASI-TANGENTIEL

Crouzeix définit le tangentiel de  $f$  en  $z$  comme étant le sous-ensemble  $Tf(z)$  de  $X'$  tel que :

$$x' \in Tf(z) \Leftrightarrow f(z) = q^c(z, x').$$

Il est alors naturel de poser la définition suivante.

DÉFINITION 3 : Soit  $f \in P$ .

$x'$  est un sous-gradient de  $f$  en  $z$  si et seulement si  $f(z) = F_z(x')$ .

Le *quasi-tangentiel* de  $f$  en  $z$ , noté  $Qf(z)$ , est l'ensemble (éventuellement vide) des sous-gradients de  $f$  en  $z$ . On a donc :

$$x' \in Qf(z) \Leftrightarrow f(z) = F_z(x')$$

THÉORÈME 6 : Soient  $f \in P$  et  $z \in X$ .

(1)  $Qf(z)$  est un convexe fermé

(2)  $0 \in Qf(z) \Leftrightarrow f(z) = \text{Inf } f$

(3)  $Qf(z) \neq \emptyset \Rightarrow f(z) = f^E(z)$

(4)  $Qf(z) \subseteq Tf(z)$ .

*Preuve* : (1), (2) et (3) sont immédiats.

(4) Il suffit de prouver que  $F_z(x') \subseteq q^c(z, x')$ .

Supposons le contraire, c'est-à-dire il existe  $(z, x')$  appartenant à  $X \times X'$  tel que  $F_z(x') > q^c(z, x')$ . Soit alors  $\mu$  vérifiant  $F_z(x') > \mu > q^c(z, x')$ . En utilisant la définition de  $q^c(z, x')$ , on obtient :

$$\text{Inf} \{ \langle z - x, x' \rangle : f(x) \leq \mu \} \leq 0 < \mu$$

Par conséquent il existe  $u$  appartenant à  $X$  pour lequel  $f(u) \leq \mu$  et  $\langle z - u, x' \rangle \leq \mu$ , autrement dit  $F_z(x') \leq f(u) \vee \langle z - u, x' \rangle \leq \mu < F_z(x')$ , ce qui est absurde et donc  $F_z(x') \subseteq q^c(z, x')$ . Soit  $x' \in Qf(z)$ . Par définition, on a :  $f(z) = F_z(x')$ . Comme  $F_z(x') \subseteq q^c(z, x')$ , on déduit que :  $f(z) \leq q^c(z, x')$ . Or  $q^c(z, x') \leq f(z)$ , d'où  $q^c(z, x') = f(z)$  et donc  $x' \in Tf(z)$ . @

5. OPTIMISATION QUASI-CONVEXE

A  $f$  appartenant à  $P$ , on associe le problème primal  $(P) : \alpha = \text{Inf } f$ .

Désignons par  $U$  et  $U'$  deux espaces vectoriels topologiques localement convexes en dualité par la forme bilinéaire notée  $(\cdot, \cdot)$ .  $U$  est appelé espace de perturbations pour le problème  $(P)$ .

Soit  $\psi$  la fonction de perturbation de  $X \times U \rightarrow [0, +\infty]$  telle que :

$$\psi(x, 0) = f(x) \text{ pour tout } x \text{ appartenant à } X$$

Pour la perturbation  $u$  de  $U$ , on considère le problème perturbé  $(P_u)$  :

$$k(u) = \text{Inf} \{ \psi(x, u) : x \in X \}$$

Remarquons que le problème  $(P)$  correspond à la valeur  $u=0$  et donc  $\alpha = k(0)$ .  $k^E$  étant la plus grande minorante qcx et sci de  $k$ , on déduit que  $k^E(0) \leq k(0) = \alpha$ . Cette inégalité nous amène à considérer le problème dual  $(Q)$  de  $(P)$  :

$$\beta = \text{Sup} \{ K_0(u') : u' \in U' \}$$

Son expression est :

$$\beta = \text{Sup} \{ \text{Inf} \{ [\text{Inf} \{ \psi(x, u) : x \in X \} \vee (-u, u')] : u \in U \} u' \in U' \}$$

On a toujours  $\beta \leq \alpha$ ; cependant on a l'égalité si  $k$  est qcx et sci en  $0$ .

Désignons par  $S$  l'ensemble des solutions du problème  $(Q)$ . On a le résultat suivant.

THÉORÈME 7 : Si l'ensemble  $Qf(0)$  est non vide, alors

$$\beta = \alpha \Leftrightarrow Qk(0) = S$$

Preuve : Il suffit de remarquer que :

$$S = \{ u' \in U' : K_0(u') = \beta = k^E(0) \} \quad \text{et} \quad Qf(0) = \{ u' \in U' : K_0(u') = \alpha \}. \quad @$$

Exemple : la « surrogate duality ».

Considérons le problème suivant. Soient  $X = R$ ,  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire usuel,  $f \in P$  et  $g \in R^X$ .

Posons  $(P) : \alpha = \text{Inf} \{ f(x); x \in C \}$  où  $C = T(g, 0)$ .

On se ramène au cas précédent en posant  $f(x) = f(x)$  si  $x \in C$  et  $+\infty$  sinon.

Posons  $U = R$  et soit le problème perturbé :  $k(u) = \text{Inf} \{ f(x) : x \in C_u \}$  où à  $u \in U$ , on associe l'ensemble  $C_u = T(g, u)$ .

Pour être conforme avec nos notations précédentes, on prendra comme fonction de perturbation  $\psi(x, u) = f(x)$  si  $x \in C_u$  et  $+\infty$  sinon. On a :

$$\begin{aligned}\Psi_{(z, t)}(0, u') &= \text{Inf} \{ \psi(x, u) \vee (t - u, u') : x, u \in \mathbf{R} \} \\ &= \text{Inf} \{ f(x) \vee (t - u, u') : x \in C_u, u \in \mathbf{R} \}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}K_t(u') &= \text{Inf} \{ k(u) \vee (t - u, u') : u \in U \} \\ &= \text{Inf} \{ \text{Inf} \{ f(x) : x \in C_u \} \vee (t - u, u') : u \in \mathbf{R} \}.\end{aligned}$$

On remarque alors que :

$$\Psi_{(z, t)}(0, u') = K_t(u')$$

et

$$\beta = \text{Sup} \{ \text{Inf} \{ f(x) \vee (-u, u') : g(x) \leq u, u \in \mathbf{R} \} : u' \in \mathbf{R} \}.$$

Posons  $d = \text{Inf} \{ f(x) \vee (-u, u') : g(x) \leq u, u \in \mathbf{R} \}$ .

$$\begin{aligned}\text{(i) } u' \geq 0 &\Rightarrow \text{Inf} \{ f(x) \vee (-u, u') : g(x) \leq u, 0 \leq u \} \\ &= \text{Inf} \{ f(x) : g(x) \leq u, 0 \leq u \} = \text{Inf } f \Rightarrow d = \text{Inf } f.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(ii) } u' < 0 &\Rightarrow \text{Inf} \{ f(x) \vee (-u, u') : g(x) \leq u, u \leq 0 \} \\ &= \text{Inf} \{ f(x) : g(x) \leq 0 \} = \alpha \\ &\geq \text{Inf} \{ \text{Max} [f(x), -u \cdot u'] : g(x) \leq u, 0 \leq u \} \\ &= \text{Inf} \{ \text{Max} [f(x), -g(x) \cdot u'] : x \in X \} \\ &\Rightarrow d = \text{Inf} \{ \text{Max} [f(x) \vee (-g(x), u') : x \in X \}.\end{aligned}$$

En résumé, le problème s'écrit :

$$\beta = \text{Sup} \{ d : u' \in U \} = \text{Sup} \{ \text{Inf} \{ f(x) \vee (-g(x), u') : x \in X \} : u' \leq 0 \}.$$

## 5. CONCLUSION

On a traité le cas où  $f$  est positive. Si  $f$  est négative, on utilise la sup-convolution quasi-convexe pour définir la polaire de  $f$  en un point  $z$ . On notera :

$$n^f(z, x') = \text{Sup} \{ \text{Min} [f(x), \langle z - x, x' \rangle] : x \in X \} \text{ pour tout } x' \text{ appartenant à } X'$$

Dans ce cas,  $n^f(z, 0) = \text{Sup } f$ .

Cependant une question demeure en suspens: peut-on prolonger notre construction à des fonctionnelles à valeurs dans  $[-\infty, +\infty]$ ?

*Note de l'auteur.* — Je tiens à remercier Réda Rheffouli pour ses remarques fructueuses et les arbitres dont j'ai beaucoup apprécié les critiques constructives.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. M. ATTEIA et A. ELQORTOBI, Quasi-Convex Duality *Lectures Notes in Control and Inform. Sci.*, 1980, 30, p. 3-8.
2. N. BOURBAKI, Espaces Vectoriels topologiques, Hermann, Paris,
3. J. P. CROUZEIX, Contributions à l'étude des fonctions quasiconvexes, *Thèse de Doctorat d'État*, série E, n° d'ordre 250, 1977. Université de Clermont-Ferrand (France).
4. M. J. GREENBERG et W. P. PIERSKALLA, Quasi-Conjugate Functions and Surrogate Duality, *Cahiers Centre Études Rech. Opér.*, 1973, 15, p. 437-448.
5. P. J. LAURENT, Approximation et Optimisation, Hermann, Paris, 1972.
6. J. E. MARTINEZ-LEGAZ, Quasiconvex Duality Theory by Generalized Conjugation Methods, *Optimization*, 1988, 19, p. 603-652.
7. J. J. MOREAU, Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques, *J. Math. Pures Appl.*, 1970, 49, p. 109-154.
8. U. PASSY et E. Z. PRISMAN, Conjugacy in quasiconvex programming, *Math. Programming*, 1984, 30, p. 121-146.
9. J. P. PENOT et M. VOLLE, On Quasi-convex Duality, *Math. Oper. Res.*, 1990, 15, p. 597-625.
10. R. T. ROCKAFELLAR, Convex Analysis, Princeton, 1970.
11. I. SINGER, Conjugate Functionals and Level Sets, *Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl.*, 1984, 8, p. 313-320.
12. M. VOLLE, Conjugaison par tranches, *Ann. Mat. Pura Appl. (IV)*, 1985, 139, p. 279-312.