REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

D. LEPELLEY

Une caractérisation du vote à la majorité simple

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 26, nº 4 (1992), p. 361-365.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1992__26_4_361_0>

© AFCET, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 26, n° 4, 1992, p. 361 à 365)

UNE CARACTÉRISATION DU VOTE À LA MAJORITÉ SIMPLE (*)

par D. LEPELLEY ([1])

Communiqué par J.-Y. JAFFRAY

Résumé. — *On montre, à l'aide d'un résultat obtenu par Young, que la seule règle de choix collectif qui vérifie les conditions de symétrie, de continuité, de consistance ainsi qu'une version affaiblie du critère de Condorcet est le vote à la majorité simple.*

Mots clés : Règles de vote; vote à la majorité simple.

Abstract. — *It is shown, with the help of a result obtained by Young, that the only social choice rule which verifies the conditions of symmetry, continuity, consistency and a weak version of the Condorcet criterion is the plurality rule.*

Keywords : Voting rules; plurality ryle.

Le cadre général de cette note est celui de la théorie des choix collectifs, qui étudie les règles permettant d'agréger des préférences individuelles en une préférence collective. Précisément, nous considérons un ensemble $N=\{1,2,3,\ldots,n\}$ d'individus (ou votants) devant choisir collectivement un élément dans un ensemble $A=\{x,y,z,\ldots\}$ d'options (ou candidats). Le nombre fini d'options est noté m. Chaque individu dispose d'un ordre de préférence strict sur l'ensemble des options. On note P_i l'ordre de préférence de l'individu i (P_i est une relation binaire asymétrique, transitive et complète définie sur A). Un profil de préférences π est une liste $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ de n ordres individuels. L'ensemble de tous les profils possibles est noté D. Une *règle de choix collectifs* (R.C.C.) permet d'associer à tout profil de préférences un sous-ensemble d'options (idéalement un singleton) : c'est une application notée f de D dans l'ensemble 2^A-$\varnothing$ des parties non vides de A.

(*) Reçu novembre 1991, accepté en avril 1992.
([1]) Centre de Recherche en Économie Mathématique et Économétrie (Rennes-Caen), U.R.A.-C.N.R.S. D 1273, Université de Caen, 14032 Caen Cedex.

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/92/04 361 05/$ 2.50
© AFCET-Gauthier-Villars

Quelle règle convient-il d'adopter ? Une pratique courante consiste à fonder le choix collectif sur les positions qu'occupent les différentes options dans les ordres de préférence des individus. La règle proposée par Borda en 1781 constitue l'exemple le plus significatif de ce type de procédure : chaque option reçoit $m-p$ points pour une p-ème place, et l'option choisie est celle qui recueille le plus grand nombre de points. Le vote à la majorité simple (ou règle de la pluralité), qui est probablement la règle de décision la plus utilisée, fournit un autre exemple dans lequel les options reçoivent un point pour une première place et zéro point pour toute autre place. Ces deux procédures appartiennent à une classe importante de R.C.C. que l'on qualifie de positionnelle. Formellement, une R.C.C. f est dite *positionnelle* si on peut lui associer un vecteur $s=(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ de $\mathbb{R}^m$ tel que :

$$x \in f(\pi) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} s_{r(i,x)} \geqq \sum_{i=1}^{n} s_{r(i,y)} \, \forall y \in A - \{x\}, \tag{1}$$

expression dans laquelle $r(i, z)$ désigne le rang de l'option z dans l'ordre de préférence de l'individu i, et s_p s'interprète comme le nombre de points reçus pour une p-ème place. Selon cette définition, le vote à la majorité simple est la règle positionnelle qui correspond à l'ensemble des vecteurs $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ de $\mathbb{R}^m$ vérifiant $s_1 > s_j$ pour tout $j \neq 1$, et $s_j = s_{j+1}$ pour tout $j \in \{2, \ldots, m-1\}$.

Dans un article remarquable paru en 1975, Young [3] a caractérisé les règles positionnelles par trois conditions (ou propriétés) : la symétrie, la consistance et la continuité. *On montre dans cette note que l'adjonction d'une quatrième condition* (inspirée du critère de Condorcet) *aux trois propriétés de Young permet d'obtenir une caractérisation du vote à la majorité simple.*

Nous commençons par introduire les conditions qu'utilise Young. La condition de symétrie résulte de la conjonction de deux propriétés usuelles en théorie des choix collectifs, la neutralité et l'anonymat. Soit λ une permutation de l'ensemble A des options et π un profil; nous notons π^λ le profil $(P_i^\lambda, \ldots, P_n^\lambda)$ défini par $[\forall x, y \in A, \forall i \in N, x P_i y \Leftrightarrow \lambda(x) P_i^\lambda \lambda(y)]$. De même, étant donné un profil π et une permutation σ de l'ensemble N des votants, π_σ désigne le profil $(P_{\sigma(1)}, \ldots, P_{\sigma(n)})$. La neutralité et l'anonymat peuvent alors se définir de la manière suivante.

Neutralité : Pour toute permutation λ de A et pour tout profil $\pi \in D$, $f(\pi^\lambda) = \lambda(f(\pi))$.

Anonymat : Pour toute permutation σ de N et pour tout profil $\pi \in D$, $f(\pi_\sigma) = f(\pi)$.

Une R.C.C. est *symétrique* (SYM) si elle est à la fois anonyme et neutre, c.a.d. si elle n'introduit de discrimination ni entre les votants (anonymat) ni entre les options (neutralité).

Les conditions de continuité et de consistance mettent en jeu des profils de taille variable. Soit π (resp. π') un profil construit à partir de n (resp. n') ordres individuels. Nous notons $\pi+\pi'$ le profil obtenu par concaténation des $n+n'$ ordres individuels qui constituent π et π'.

Continuité: $\forall \pi, \pi' \in D$, $\exists \alpha \in \mathbb{N}$ tel que $[f(\pi)=\{x\} \Rightarrow f(\alpha\pi+\pi')=\{x\}]$.

Consistance: $\forall \pi, \pi' \in D, f(\pi) \cap f(\pi') \neq \varnothing \Rightarrow f(\pi) \cap f(\pi') = f(\pi+\pi')$.

La condition de continuité (notée CONT dans ce qui suit) est essentiellement d'ordre technique, et joue un rôle mineur dans la démonstration de Young. La condition de consistance (CONS) est en revanche au cœur de son analyse. Pratiquement, l'intérêt d'une règle vérifiant cette condition réside dans la possibilité qu'elle offre de «décentraliser» le processus de choix collectif: si deux groupes d'individus considèrent, dans des votes séparés, une option x comme étant la meilleure, alors la consistance de la R.C.C. permet de conclure, sans qu'il soit nécessaire d'organiser une consultation globale, que x est aussi la meilleure option pour la collectivité formée des deux groupes d'individus.

THÉORÈME 1 (Young) : *Les seules R.C.C. qui vérifient les conditions SYM, CONT et CONS sont les règles positionnelles.*

Ce résultat constitue indubitablement un argument convaincant en faveur de ce type de procédures. On sait malheureusement depuis Condorcet que les règles positionnelles violent la propriété définie ci-dessous (nous notons $|X|$ le cardinal de l'ensemble X).

Condorcet (COND): $\forall \pi \in D$ $[(\exists x \in A$ tel que $|\{i \in N : x P_i y\}| > n/2$ $\forall y \neq x) \Rightarrow f(\pi)=\{x\}]$.

Cette condition est connue sous le nom de critère de Condorcet; elle stipule qu'une option capable de battre toutes les autres dans des duels majoritaires doit constituer le choix collectif. *Aucune règle positionnelle ne vérifie ce critère*, que la plupart des théoriciens du choix collectif considèrent comme fondamental (pour une illustration de ce résultat négatif, voir par exemple Moulin [1], p. 231). Peut-on néanmoins tenter de concilier l'approche positionnelle (c.a.d., essentiellement, la consistance) et le principe de Condorcet ? Une voie d'investigation possible consiste à s'interroger sur l'existence de règles positionnelles vérifiant des versions affaiblies du critère de Condorcet. La condition suivante a été introduite dans la littérature par Richelson [2].

Condorcet faible
$(\mathrm{COND}^-) : \forall \pi \in D\ [(\exists x \in A$ tel que $|\{i \in N : x P_i y \,\forall y \neq x\}| > n/2) \quad (\pi) = \{x\}]$.

L'affaiblissement qui résulte du passage de la condition COND à la condition COND^- peut s'interpréter de la manière suivante : COND exige que l'option x soit élue si pour tout $y \neq x$ on peut trouver une majorité d'individus qui préfèrent x à y, les majorités en question pouvant éventuellement être composées d'individus différents selon l'option $y \neq x$ que l'on considère; COND^- pour sa part se contente d'exiger que l'option x soit élue lorsque pour tout $y \neq x$ on peut trouver une majorité constituée des *mêmes individus* qui préfèrent x à y (ce qui suppose que ces individus classent x en première position).

Il est clair que le vote à la majorité simple (contrairement à la règle de Borda) est compatible avec la condition COND^-. Ce n'est évidemment pas la seule R.C.C. possédant cette propriété : le vote majoritaire à deux tours, pour ne citer que cet exemple familier, vérifie lui aussi COND^-. On peut cependant établir que le vote à la majorité simple est la seule règle symétrique et continue vérifiant conjointement CONS et COND^-.

THÉORÈME 2 : *La seule R.C.C. qui vérifie les conditions SYM, CONT, CONS et* COND^- *est le vote à la majorité simple.*

Preuve. — Le vote à la majorité simple vérifie clairement les quatre conditions. Il nous faut montrer qu'aucune autre R.C.C. ne possède cette qualité. Soit f une R.C.C. vérifiant les conditions SYM, CONT, CONS et COND^-. D'après le théorème 1, f est une règle positionnelle : on peut lui associer un vecteur $s = (s_1, \ldots, s_m)$ de $\mathbb{R}^m$. Supposons qu'il existe $j \neq 1$ tel que $s_j \geqq s_1$, et considérons un profil π tel que $r(i, x) = 1$ et $r(i, y) = j$ pour tout $i \in N$ (rappelons que $r(i, x)$ désigne le rang de l'option x dans l'ordre de préférence de l'individu i). On a alors $\sum_i s_{r(i,y)} = n s_j \geqq \sum_i s_{r(i,x)} = n s_1$, et il résulte de la relation (1) que $[x \notin f(\pi)$ ou $\{x, y\} \subseteqq f(\pi)]$. Or par la condition COND^- nous devons avoir $f(\pi) = \{x\}$, une contradiction. Donc $s_1 > s_j\ \forall j \neq 1$.

Pour établir que f est le vote à la majorité simple, il reste à montrer que $s_j = s_{j+1}\ \forall j \in \{2, \ldots, m-1\}$. Supposons le contraire : $\exists j \in \{2, \ldots, m-1\}$ tel que $s_j \neq s_{j+1}$. On aurait ainsi soit $s_j > s_{j+1}$, soit $s_j < s_{j+1}$. Considérons le premier cas : $s_j > s_{j+1}$. Soit alors k un entier tel que $k > (s_1 - s_j)/(s_j - s_{j+1})$. Posons $n = 2k + 1$ et construisons un profil π' tel que $[r(i, x) = 1$ et $r(i, y) = j$ $\forall i \in \{1, \ldots, k, k+1\}]$ et $[r(i, x) = j + 1$ et $r(i, y) = 1$ $\forall i \in \{k+2, \ldots, n\}]$. Les « scores » des options x et y sont alors égaux à $(k+1) s_1 + k s_{j+1}$ et

$(k+1)s_j+ks_1$ respectivement. Puisque $k>(s_1-s_j)/(s_j-s_{j+1})$, le score de y est strictement supérieur à celui de x, et on en déduit que $x \notin f(\pi')$. Or la condition COND^- implique $f(\pi')=\{x\}$, une contradiction. Supposons maintenant que l'on ait $s_j<s_{j+1}$. Il suffit alors de permuter j et $j+1$ dans le raisonnement qui précède pour obtenir à nouveau une contradiction, et la preuve du théorème est complète. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Moulin, *Axioms of Cooperative Decision Making*, Econometric Society Monographs, Cambridge University Press, 1988.
2. J. T. Richelson, A Comparative Analysis of Social Choice Functions, II, *Behavioral Sci.*, 1978, *23*, p. 38-44.
3. H. P. Young, Social Choice Scoring Functions, *S.I.A.M. J. Appl. Math.*, 1975, *28*, p. 824-838.