Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

Arnaud Fréville

G. Plateau

Sac à dos multidimensionnel en variables 0-1 : encadrement de la somme des variables à l'optimum

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 27, nº 2 (1993), p. 169-187.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1993__27_2_169_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 27, n° 2, 1993, p. 169 à 187)

SAC A DOS MULTIDIMENSIONNEL EN VARIABLES 0-1 : ENCADREMENT DE LA SOMME DES VARIABLES A L'OPTIMUM (*)

par Arnaud Fréville (1) et G. Plateau (2)

Résumé. – *Dans le cadre de la résolution des programmes linéaires en variables 0-1, Glover a été le premier auteur à utiliser dans une méthode d'énumération implicite une contrainte supplémentaire du type encadrement de la somme des variables à l'optimum. Dans ce papier, nous proposons pour le sac à dos multidimensionnel en variables 0-1, une évaluation fine des bornes basée sur la résolution exacte du dual* surrogate *de relaxations du type sac à dos bidimensionnel, et sur la connaissance d'une bonne solution réalisable du problème initial. De nombreuses expériences numériques montrent l'efficacité de notre méthode sur les problèmes tests de la littérature ainsi que sur des instances de grande taille tirées au hasard selon la loi uniforme.*

Mots clés : *Optimisation en 0-1; sac à dos bidimensionnel ; dual* surrogate*; bornes sur la somme des variables.*

Abstract. – *Glover has been the first author to introduce an extra constraint, related to the sum of the variables fixed at 1 at the optimum, for solving 0-1 linear programming problems with implicit enumeration methods. In this paper, we propose a new algorithm to compute tight bounds of this sum for the 0-1 multidimensional knapsack problem. The method is based on the exact solution of the* surrogate *dual of relaxations which correspond to 0-1 bidimensional knapsack problems, and on the knowledge of a good primal feasible solution. Intensive numerical experiments show the efficiency of our method over the classical test problems of literature, and large size instances with randomly generated data.*

Keywords: *0-1 optimization; bidimensional knapsack; surrogate dual; bounds on the sum of variables.*

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est de réduire le domaine des solutions réalisables du problème du sac à dos multidimensionnel en variables 0-1 suivant

---

(*) Reçu en avril 1991, accepté en octobre 1992.
(1) L.M^2.I et L.I.P.N., Institut des Sciences et Techniques de Valenciennes, Université de Valenciennes, BP. 311., 59304 Valenciennes Cedex, France.
(2) Laboratoire d'Informatique de Paris-Nord, C.N.R.S. U.R.A. 1507, Institut Galilée, Département d'Informatique, Université de Paris-Nord, avenue J. B. Clément. 93430, Villetaneuse, France.

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/93/02 169 19/$ 3.90

$$(P) \qquad \left[\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & Ax \leq b \\ & x \in B \end{array}\right.$$

avec $A \in \mathbf{N}^{m \times n}$, $c \in \mathbf{N}^{*n}$, $b \in \mathbf{N}^{*m}$, $m \geq 2$ et

$$B = \{x \in \mathbf{R}^n \,|x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, n\}$$

l'ensemble des sommets de l'hypercube unité de $\mathbf{R}^n$, par adjonction d'une contrainte supplémentaire de type encadrement sur la somme des variables, valide pour l'ensemble $\Omega(P)$ des solutions optimales du problème :

$$L \leq \sum_{j=1}^{n} x_j \leq U.$$

Une telle coupe permet à l'évidence de réduire le domaine continu, et de renforcer les évaluations dans les procédures d'énumération implicite, par exemple les valeurs des relaxations Lagrangiennes (*voir* [FAPL92] et [MATO92], respectivement pour le sac à dos « baudruche » et les instances de sac à dos à données fortement corrélées).

D'autre part elle peut être directement exploitée pour réduire l'exploration de l'arborescence des solutions binaires (*voir* [GLO65] et [FAPL92]) ; des expériences sont en cours pour la résolution exacte du sac à dos bidimensionnel en variables 0-1 (*voir* en particulier [FRPL92*b*]).

Après avoir rappelé en section 2.1 l'approche initiale de Glover [GLO65], nous développons en section 2.2 une nouvelle méthode d'encadrement basée sur l'adjonction de contraintes de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq p \qquad \text{ou} \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j \geq p, \qquad p \in \{1, \ldots, n\},$$

à une relaxation *surrogate* du problème initial (P). La description algorithmique de la méthode est précisée en section 2.2.1. Cette procédure nécessite la maximisation de fonctions quasi-convexes correspondant aux fonctions duales *surrogate* de sacs à dos bidimensionnels en variables 0-1. Deux méthodes exacte et approchée de type dichotomique, correspondant respectivement aux cas entier et continu, sont explicitées en section 2.2.2.

En section 3 sont rassemblés les résultats numériques relatifs à des problèmes classiques de la littérature et des instances de grande taille tirées au hasard selon la loi uniforme.

1. NOTATIONS

R ensemble des nombres réels
N ensemble des entiers naturels
e le vecteur tout à 1 de $\mathbf{R}^n$
A_i ligne i de la matrice A
A_{ij} élément générique de la matrice A
$v(\bullet)$ valeur du problème $(\bullet)$
$\Omega(\bullet)$ ensemble des solutions optimales du problème $(\bullet)$
$\bar{v}(\bullet)$ borne supérieure de la valeur du problème $(\bullet)$
$v(\bar{\bullet})$ valeur de la relaxation en continu du problème $(\bullet)$
$\underline{v}(\bullet)$ borne inférieure de la valeur du problème $(\bullet)$
$\lfloor a \rfloor$ partie entière du réel a
$\lceil a \rceil$ plus petit entier supérieur ou égal au réel a
$co(X)$ enveloppe convexe de l'ensemble X
$U(a, b)$ distribution uniforme sur l'intervalle $[a, b]$

2. PROCEDURE DE CALCUL DES BORNES L ET U

2.1. Approche de Glover revisitée

Glover a été le premier auteur à proposer d'utiliser un encadrement

$$L \leq \sum_{j=1}^{n} x_j \leq U$$

de la somme des variables susceptibles d'être fixées à 1 à l'optimum du problème (P) [GLO65].

Le calcul des bornes L et U est effectué à partir de la connaissance d'encadrements de la fonction économique cx et des ressources consommées Ax, valides pour toutes les solutions optimales du problème (P) :

$$\begin{cases} \underline{v}(P) \leq cx \leq \bar{v}(P) \\ \underline{b} \leq Ax \leq b \end{cases}$$

La borne inférieure $\bar{v}$ (P) est fournie par des méthodes heuristiques, plus précisément la méthode AGNES développée par les auteurs ([FRPL86], [FRE91], [FRPL91a]).

La borne supérieure $\bar{v}$ (P) est déterminée en résolvant,

– soit la relaxation en continu $(\bar{P})$

$$(\bar{P}) \qquad \begin{bmatrix} \max & cx \\ \text{s.c.} & Ax \leq b \\ & x \in co\,\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

– soit le dual *surrogate* (S) ou sa relaxation en continu $(\bar{S})$

$$(S) \qquad \begin{bmatrix} \min & \max\{cx \,|w\,A\,x \leq wb,\, x \in \mathbf{B}\} \\ \text{s.c.} & w \in \mathbf{R}_+^m \end{bmatrix}$$

$$(\bar{S}) \qquad \begin{bmatrix} \min & \max\{cx \,|w\,A\,x \leq wb,\, x \in co\,\mathbf{B}\} \\ \text{s.c.} & w \in \mathbf{R}_+^m \end{bmatrix}$$

cette résolution peut être :

– *exacte* : méthode simplexe pour le programme linéaire $(\bar{P})$ équivalent au dual *surrogate* $(\bar{S})$, méthode de dichotomie étendue pour le dual *surrogate* (S) si m=2 [FRPL93], de quasi-sous-gradients si $m \geq 2$ [DYE80],

ou

– *approchée* : méthode de sous-gradients à comportement monotone pour les duaux *surrogate* (S) et $(\bar{S})$ [FLP90] pour les instances de grande taille.

Pour symétriser les calculs de L et U, un minorant $\underline{b}$ de l'ensemble $\{Ax \mid x \in \Omega(P)\}$ est calculé en résolvant les m sacs à dos en variables 0-1 (K_i) suivants :

$$(K_i) \qquad \min A_i\,x \text{ s.c. } cx \geq \underline{v}(P), \qquad x \in \mathbf{B} \qquad i = 1, \ldots, m$$

pour poser $\underline{b}_i = v(K_i)$, $i=1, \ldots, m$. En pratique on se restreint aux relaxations en continu, $(\bar{K}_i)$, d'où pour $i = 1, \ldots, m$ et par complémentation des variables

$$\begin{aligned} \underline{b}_i &= \lceil v\left(\bar{K}_i\right)\rceil \\ &= \sum_{j=1}^{n} A_{ij} - \left\lfloor \max\left\{ A_i\,x \;\middle|\; cx \leq \sum_{j=1}^{n} c_j - \underline{v}(P),\, x \in co(\mathbf{B}) \right\} \right\rfloor \end{aligned}$$

Un premier encadrement

$$L \leq \sum_{j=1}^{n} x_j \leq U$$

valide pour l'ensemble des solutions optimales $\Omega(P)$ est alors obtenu à partir des évaluations suivantes :

$$l_0 = \min\left\{k \;\middle|\; \sum_{j=1}^{k} c_j \geq \underline{v}(P)\right\},$$

$$l_i = \min\left\{k \;\middle|\; \sum_{j=1}^{k} A_{ij} \geq \underline{b}_i\right\} \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$u_0 = \max\left\{k \;\middle|\; \sum_{j=1}^{k} c_j \leq \bar{v}(P)\right\},$$

$$u_i = \max\left\{k \;\middle|\; \sum_{j=1}^{k} A_{ij} \leq b_i\right\} \qquad i = 1, \ldots, m$$

avec

$$L = \max_{i=0, \ldots, m} l_i \qquad U = \min_{i=0, \ldots, m} u_i$$

En pratique, chaque calcul des l_i (resp. u_i) se fait en complexité temporelle $O(n)$ par la détermination des k plus grands (resp. petits) coefficients de la contrainte concernée. Cette première évaluation des bornes L et U nécessite donc $2m+2$ appels d'une variante de l'algorithme de complexité linéaire en moyenne NKR77 [FAPL82].

2.2. Nouvelle approche

Il est possible d'améliorer très sensiblement la précédente évaluation des bornes L et U en injectant des coupes

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq p \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j \geq p \qquad \text{avec} \quad p \in \{1, \ldots, n\},$$

dans une relaxation *surrogate* ($S(w)$) du problème (P), où w désigne un multiplicateur obtenu à partir de la résolution de la relaxation en continu ($\bar{P}$) ou du dual *surrogate* (S).

Cela revient à considérer les deux familles $\{PL(p)\}_{p=1,n}$ et $\{PU(p)\}_{p=1,n}$ de problèmes du type sac à dos bidimensionnel suivants :

$$(PL(p)) \quad \left[\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & wAx \leq wb \\ & ex \leq p \\ & x \in \mathbf{B} \end{array}\right. \qquad (PU(p)) \quad \left[\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & wAx \leq wb \\ & ex \geq p \\ & x \in \mathbf{B} \end{array}\right.$$

et à comparer les valeurs des duaux *surrogate* de ces problèmes avec une borne inférieure $\underline{v}(P)$ de la valeur du problème initial (P).

2.2.1. *Algorithme d'encadrement*

Pour un entier $p \in \{1, ..., n\}$ donné, considérons le dual *surrogate* $(SL(p))$ (resp. $(SU(p))$) du sac à dos bidimensionnel $(PL(p))$ (resp. $(PU(p))$) :

$$(SL(p)) \qquad \begin{bmatrix} \min & \varphi_{\inf}(u, p) \\ \text{s.c.} & u \in \mathbf{R}_+^2 \end{bmatrix} \qquad (SU(p)) \qquad \begin{bmatrix} \min & \varphi_{\sup}(u, p) \\ \text{s.c.} & u \in \mathbf{R}_+^2 \end{bmatrix}$$

où $\varphi_{\inf}(\bullet, p)$ et $\varphi_{\sup}(\bullet, p)$ sont les fonctions duales surrogate définies pour $u = (u_1, u_2)$ respectivement par

$$\varphi_{\inf}(u, p) = \max\{cx \,|(u_1\, wA + u_2\, e)\, x \leq u_1\, wb + u_2\, p,\ x \in \mathbf{B}\}$$

et

$$\varphi_{\sup}(u, p) = \max\{cx \,|(u_1\, wA - u_2\, e)\, x \leq u_1\, wb - u_2\, p,\ x \in \mathbf{B}\}.$$

PROPOSITION 1 : *Les fonctions* $\Psi_{\inf} : p \to v(SL(p))$ *et* $\overline{\Psi_{\inf}} : p \to v\,\overline{(SL(p))}$ *définies sur* $\{1, ..., n\}$ *sont croissantes.*

Preuve : $\forall u \in \mathbf{R}_+^2$ et pour tout couple d'entiers $(p,p') \in \{1, ..., n\}^2$ tel que $p < p'$ nous avons l'inclusion suivante :

$$\{x \in \mathbf{B}\,|(u_1\, wA + u_2\, e)\, x \leq u_1\, wb + u_2\, p\} \subseteq \{x \in \mathbf{B}\,|(u_1\, wA + u_2\, e)x \leq u_1\, wb + u_2\, p'\}$$

d'où $\varphi_{\inf}(u, p) \leq \varphi_{\inf}(u, p')$ et $\Psi_{\inf}(p) \leq \Psi_{\inf}(p')$. On obtient de même $\overline{\Psi_{\inf}}(p) \leq \overline{\Psi_{\inf}}(p')$ en remplaçant $\mathbf{B}$ par son enveloppe convexe co$(\mathbf{B})$. ♦

PROPOSITION 2 : *Les fonctions* $\Psi_{\sup} : p \to v(SU(p))$ *et* $\overline{\Psi_{\sup}} : p \to v\,\overline{(SU(p))}$ *définies sur* $\{1, ..., n\}$ *sont décroissantes.*

Preuve : Le changement de sens des inégalités provient du changement de sens de l'inclusion

$$\{x \in \mathbf{B}\,|(u_1\, wA - u_2\, e)x \leq u_1\, wb - u_2\, p\} \supseteq \{x \in \mathbf{B}\,|(u_1\, wA - u_2\, e)x \leq u_1\, wb - u_2\, p'\} \quad ♦$$

Exemple 1 : problème n° 6 [PET67]

$n = 39 \qquad m = 5$

$\underline{v}(P) = v(P) = 10618 \qquad v(S) = 10659 \qquad v(\bar{P}) = v(\bar{S}) = 10672.346$

p	$\overline{\Psi_{\text{inf}}}(p)$	$\Psi_{\text{inf}}(p)$	p	$\overline{\Psi_{\text{inf}}}(p)$	$\Psi_{\text{inf}}(p)$	p	$\overline{\Psi_{\text{inf}}}(p)$	$\Psi_{\text{inf}}(p)$
1. . .	4260,00	4260	14. . .	10381,74	10384	27. . .	10668,84	*10659*
2. . .	6360,00	6360	15. . .	10435,28	10462	28. . .	10670,81	*10659*
3. . .	7485,00	7485	16. . .	10481,91	10511	29. . .	*10672,31*	*10659*
4. . .	8116,00	8116	17. . .	10519,77	10544	30. . .	*10672,34*	*10659*
5. . .	8736,00	8736	18. . .	10552,84	10553	31. . .	*10672,34*	*10659*
6. . .	9158,36	8972	19. . .	10583,56	10588	32. . .	*10672,34*	*10659*
7. . .	9504,67	9392	20. . .	**10607,20**	**10594**	33. . .	*10672,34*	*10659*
8. . .	9817,12	9797	21. . .	10624,00	10620	34. . .	*10672,34*	*10659*
9. . .	9945,31	9905	22. . .	10637,36	10632	35. . .	*10672,34*	*10659*
10. . .	10052,17	10012	23. . .	10649,26	10640	36. . .	*10672,34*	*10659*
11. . .	10147,84	10173	24. . .	10658,56	10654	37. . .	*10672,34*	*10659*
12. . .	10234,82	10227	25. . .	10663,83	10658	38. . .	*10672,34*	*10659*
13. . .	10316,05	10313	26. . .	10666,75	10659	39. . .	*10672,34*	*10659*

p	$\overline{\Psi_{\text{sup}}}(p)$	$\Psi_{\text{sup}}(p)$	p	$\overline{\Psi_{\text{sup}}}(p)$	$\Psi_{\text{sup}}(p)$	p	$\overline{\Psi_{\text{sup}}}(p)$	$\Psi_{\text{sup}}(p)$
1. . .	*10672,34*	*10659*	14. . .	*10672,34*	*10659*	27. . .	*10672,34*	*10659*
2. . .	*10672,34*	*10659*	15. . .	*10672,34*	*10659*	28. . .	*10672,34*	*10659*
3. . .	*10672,34*	*10659*	16. . .	*10672,34*	*10659*	29. . .	*10672,34*	*10659*
4. . .	*10672,34*	*10659*	17. . .	*10672,34*	*10659*	30. . .	*10672,34*	*10659*
5. . .	*10672,34*	*10659*	18. . .	*10672,34*	*10659*	31. . .	*10672,34*	*10659*
6. . .	*10672,34*	*10659*	19. . .	*10672,34*	*10659*	32. . .	10665,93	10646
7. . .	*10672,34*	*10659*	20. . .	*10672,34*	*10659*	33. . .	10646,43	10628
8. . .	*10672,34*	*10659*	21. . .	*10672,34*	*10659*	34. . .	10620,29	**10567**
9. . .	*10672,34*	*10659*	22. . .	*10672,34*	*10659*	35. . .	**10584,69**	10447
10. . .	*10672,34*	*10659*	23. . .	*10672,34*	*10659*	36. . .	10537,74	10163
11. . .	*10672,34*	*10659*	24. . .	*10672,34*	*10659*	37. . .	10445,74	9903
12. . .	*10672,34*	*10659*	25. . .	*10672,34*	*10659*	38. . .	9698,98	8363
13. . .	*10672,34*	*10659*	26. . .	*10672,34*	*10659*	39. . .	9364,08	8363

Ces propriétés de monotonie induisent les résultats suivants à la base du nouveau calcul des bornes L et U.

PROPOSITION 3 : *Soient $x^* \in \Omega(P)$ une solution optimale du problème (P) et un entier $p \in \{1, ..., n\}$.*

Si $\Psi_{\text{inf}}(p) \leq \underline{v}(P)$ ou $\lfloor \overline{\Psi_{\text{inf}}}(p) \rfloor < \underline{v}(P)$ alors $ex^* \geq p + 1$.

Preuve : Montrons la contraposée $ex^* \leq p \Rightarrow \Psi_{\inf}(p) \geq \underline{v}(P)$. Si $ex^* \leq p$ alors x^* est une solution réalisable du sac à dos multidimensionnel $(P_{\inf}(p))$ suivant :

$$(P_{\inf}(p)) \quad \left[\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & Ax \leq b \\ & ex \leq p \\ & x \in \mathbf{B} \end{array}\right.$$

et par conséquent $v(P_{\inf}(p)) \geq cx^* = v(P)$.

D'autre part $v(P_{\inf}(p)) \leq v(P)$ puisque

$$\{x \mid Ax \leq b, ex \leq p, x \in \mathbf{B}\} \subseteq \{x \mid Ax \leq b, x \in \mathbf{B}\},$$

et ainsi $v(P) = v(P_{\inf}(p))$. Il vient

$$\underline{v}(P) \leq v(P) = v(P_{\inf}(p)) \leq v(PL(p)) \leq v(SL(p)) = \Psi_{\inf}(p)$$

car $(PL(p))$ et $(SL(p))$ sont des relaxations *surrogate* respectivement de. $(P_{\inf}(p))$ et $(PL(p))$. L'inégalité $\Psi_{\inf}(p) \leq \lfloor \overline{\Psi_{\inf}}(p) \rfloor$ induit le deuxième résultat.

Proposition 4 : *Soit* $x^* \in \Omega(P)$ *une solution optimale du problème* (P) *et un entier* $p \in \{1, ..., n\}$.

Si $\Psi_{\sup}(p) < \underline{v}(P)$ *ou* $\lfloor \overline{\Psi_{\sup}}(p) \rfloor < \underline{v}(P)$ *alors* $ex^* \leq p-1$.

Preuve : $ex^* \geq p$ implique que $v(P) = v(P_{\sup}(p))$ avec

$$(P_{\sup}(p)) \quad \left[\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & Ax \leq b \\ & ex \geq p \\ & x \in \mathbf{B} \end{array}\right. .$$

La suite est identique à la démonstration précédente en remplaçant $(P_{\inf}(p))$ par $(P_{\sup}(p))$. ♦

Les deux propositions précédentes permettent de statuer l'algorithme d'ENCADREMENT suivant :

ENCADREMENT

début
{initialisation : approche de Glover}
    L := max {l_i |i = 0, ..., m};   U := min {u_i |i = 0, ..., m};
{phase en continu}
    p := L;
    tant que $\lfloor \overline{\Psi_{\inf}}(p) \rfloor < \underline{v}(P)$ **faire** p := p + 1 **fin tant que;**
    L := p;
    p := U;
    tant que $\lfloor \overline{\Psi_{\sup}}(p) \rfloor < \underline{v}(P)$ **faire** p := p − 1 **fin tant que;**
    U := p;
{phase en entier}
    p := L;
    tant que $\Psi_{\inf}(p) < \underline{v}(P)$ **faire** p := p + 1 **fin tant que;**
    L := p;
    p := U;
    tant que $\Psi_{\sup}(p) < \underline{v}(P)$ **faire** p := p − 1 **fin tant que;**
    U := p
fin

2.2.2. *Résolution des duaux* surrogate

La mise en œuvre de l'algorithme d'*ENCADREMENT* nécessite la résolution des duaux *surrogate* en continu ($SL(p)$) et ($SU(p)$) d'une part, et en entier ($SL(p)$) et ($SU(p)$) d'autre part.

De manière plus générale nous avons à résoudre le dual *surrogate* en entier (S) ou continu ($\bar{S}$) du sac à dos bidimensionnel en variables 0-1 (01BK) suivant :

$$(01BK) \quad \left[\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & A_1 x \leq b_1 \\ & A_2 x \leq b_2 \\ & x \in \mathbf{B} \end{array}\right.$$

avec

$$(S) \quad \left[\begin{array}{ll} \min & v(S(u)) \\ \text{s.c.} & u \in \mathbf{R}_+^2 \end{array}\right.$$

où $v(S(u)) = \varphi(u) = \max \{cx \,|(u_1 A_1 + u_2 A_2)x \leq u_1 b_1 + u_2 b_2,\ x \in B\}$

et

$$(S) \qquad \begin{bmatrix} \min & v(\overline{S(u)}) \\ \text{s.c.} & u \in \mathbf{R}_+^2 \end{bmatrix}$$

où $v(\overline{S(u)}) = \bar{\varphi}(u) = \max\{cx \,|(u_1 A_1 + u_2 A_2) x \leq u_1 b_1 + u_2 b_2,\, x \in co(\mathbf{B})\}$

Les propriétés suivantes, communes aux fonctions quasi-convexes $\varphi(\bullet)$ et $\bar{\varphi}(\bullet)$, permettent de résoudre les duaux *surrogate* par un *algorithme de dichotomie restreint à l'intervalle compact [0,1].*

● La fonction duale surrogate $\varphi(\bullet)$ vérifie :

$$\forall u \in \mathbf{R}_+^2,\ \forall \lambda > 0 \qquad \varphi(\lambda u) = \varphi(u) \qquad \text{(idem pour } \bar{\varphi}(\bullet)),$$

ce qui permet de normaliser le multiplicateur *u* et de ramener la résolution du dual *surrogate* à une recherche unidimensionnelle. En suivant le choix de [GAPI85], à chaque multiplicateur $u = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}_+^2$ est associé un multiplicateur $\mu \in [0, +\infty]$ défini par :

$$\begin{cases} \quad (1, \mu) \qquad \text{avec} \quad \mu = \dfrac{u_2}{u_1} & \text{si} \quad u_1 > 0 \\ (0, 1) \quad \text{ou} \quad (1, +\infty) & \text{si} \quad u_1 = 0 \end{cases}$$

et ainsi le dual *surrogate* (*S*) se reformule sous la forme :

$$(S) \qquad \begin{bmatrix} \min & \varphi(u) \\ \text{s.c.} & \mu \in [0, +\infty] \end{bmatrix}$$

(idem pour $(\bar{S})$ avec $\bar{\varphi}(\mu)$).

• La minimisation de la fonction quasi-convexe $\varphi(\mu)$ (resp. $\bar{\varphi}(\mu)$) peut s'effectuer par une procédure dichotomique à partir des propriétés suivantes.

Proposition 5 : *Soient* $\mu^\circ \in [0, +\infty]$ *et* $x^*(\mu^\circ)$ *une solution optimale de* $(S(\mu^\circ))$ *(resp.* $(\overline{S(\mu^\circ)})$*).*

(i) *si* $A_2 x^*(\mu^\circ) > b_2$ *alors* $\forall \mu \in [0, \mu^\circ]$ $\varphi(u) \geq \varphi(\mu^\circ)$ *(resp.* $\bar{\varphi}(u) \geq \bar{\varphi}(\mu^\circ)$*).*

(ii) *si* $A_1 x^*(\mu^\circ) > b_1$ *alors* $\forall \mu \in [0, +\infty]\, \varphi(u) \geq \varphi(\mu^\circ)$ *(resp.* $\bar{\varphi}(u) \geq \bar{\varphi}(\mu^\circ)$*).*

Preuve : (i) la solution optimale $x^*(\mu^\circ)$ de $(S(\mu^\circ))$ vérifie :

$$(A_1 + \mu^\circ A_2)\, x^*(\mu^\circ) \leq b_1 + \mu^\circ b_2 \tag{1}$$

L'hypothèse $A_2\, x^*\,(\mu^\circ) > b_2$ associée à $\mu - \mu^\circ \leq 0$ donne :

$$(\mu - \mu^\circ)\, A_2\, x^*\,(\mu^\circ) \leq (\mu - \mu^\circ)\, b_2 \tag{2}$$

L'inégalité (1)+(2) induit la réalisabilité de $x^*\,(\mu^\circ)$ pour la relaxation $(S\,(\mu))$ et par conséquent

$$\varphi\,(u) \;=\; v\,(S\,(\mu)) \;\geq\; cx^*\,(\mu^\circ) \;=\; v\,(S\,(\mu^\circ)) \;=\; \varphi\,(\mu^\circ)$$

(démonstration identique pour $\bar{\varphi}\,(\mu)$).

(ii) on revient au cas précédent en considérant le changement de variable $\mu \rightarrow 1/\mu$ associé à la permutation des deux contraintes. ♦

Une procédure dichotomique peut ainsi être déduite car les deux autres situations potentielles permettent de conclure :

– $x^*\,(\mu^\circ)$ ne peut pas violer simultanément les deux contraintes, car alors $x^*\,(\mu^\circ)$ ne serait plus réalisable pour la contrainte *surrogate*.

– si $x^*\,(\mu^\circ)$ satisfait simultanément les deux contraintes alors $x^*\,(\mu^\circ)$ est une solution optimale du primal (*P*) et dans ce cas le saut de dualité est nul : $v\,(P) = v\,(S) = cx^*\,(\mu^\circ)$.

• La proposition 5 assure aussi de pouvoir prendre [0,1] comme intervalle de confiance initial. En effet il suffit d'inspecter la contrainte *surrogate* (S (1)) définie pour le centre de l'inversion $\mu \rightarrow 1/\mu$, et de procéder à une permutation des contraintes s'il s'avère que la recherche serait à effectuer sur $[1,\, +\infty]$. Cette permutation correspond au changement de variables $\mu \rightarrow 1/\mu$ qui est compatible avec la normalisation choisie.

Cas continu

L'*algorithme de dichotomie* décrit en figure 1 permet de résoudre le dual *surrogate* en continu $(\bar{S})$. Trois critères d'arrêt sont pris en compte :

– si la solution optimale $x^*\,(\mu)$ de la relaxation *surrogate* en continu $(\bar{S}\,(\mu))$ est primale réalisable, alors $v\,(\bar{P}) = v\,(\bar{S})$.

– le deuxième critère d'arrêt $(\mu_d - \mu_g \leq \epsilon)$ est le critère classique des méthodes de dichotomie qui assure une ϵ-optimalité sur l'argument μ mais non sur la valeur $\varphi\,(\mu)$.

– le fait d'approcher la valeur optimale $v\,(\overline{S})$ par une suite majorante décroissante permet d'arrêter la recherche dès qu'une valeur de la suite devient inférieure à une bonne inférieure $\underline{v}\,(P)$ du primal. Puisque

$$v\,(\overline{S}) \;=\; v\,(\overline{P}),$$

```
{intervalle de confiance}
choisir ε>0; fin:=faux;
résoudre ( $\overline{S(1)}$ );
si v( $\overline{S(1)}$ ) < $\underline{v}$(P) alors fin:=vrai { v( $\overline{S}$ ) < $\underline{v}$(P) } finsi ;
si x*(1) est primale réalisable
    alors v( $\overline{S}$ ):=cx*(1) ; fin:=vrai { v( $\overline{S}$ ) = v( $\overline{P}$ ) }
    sinon si A1x*(1)>b1
              alors résoudre ( $\overline{S(0)}$ );
                  si v( $\overline{S(0)}$ ) < $\underline{v}$(P) alors fin:=vrai { v( $\overline{S}$ ) < $\underline{v}$(P) } finsi ;
                  si A2x*(0)≤b2 alors v( $\overline{S}$ ):=cx*(0); fin:=vrai { v( $\overline{S}$ ) = v( $\overline{P}$ ) } finsi
              sinon résoudre ( $\overline{S(\infty)}$ );
                  si v( $\overline{S(\infty)}$ ) < $\underline{v}$(P) alors fin:=vrai { v( $\overline{S}$ ) < $\underline{v}$(P) } finsi ;
                  si A1x*(∞)≤b1
                      alors v( $\overline{S}$ ):=cx*(∞); fin:=vrai { v( $\overline{S}$ ) = v( $\overline{P}$ ) }
                      sinon permuter les 2 contraintes
                  finsi
          finsi
finsi ;
μg:=0; μd:=1;

{dichotomie}
tant que ¬ fin faire
    si μd - μg ≤ ε
          alors fin:=vrai {ε-optimalité}
          sinon μ:=(μg+μd)/2;résoudre ( $\overline{S(\mu)}$ );
              si v( $\overline{S(\mu)}$ ) < $\underline{v}$(P) alors fin:=vrai { v( $\overline{S}$ ) < $\underline{v}$(P) } finsi ;
              si x*(μ) est primale réalisable
                  alors v( $\overline{S}$ ):=cx*(μ); fin:=vrai { v( $\overline{S}$ ) = v( $\overline{P}$ ) }
                  sinon si A2x*(μ)>b2
                          alors μg:=μ
                          sinon μd:=μ {A1x*(μ)>b1}
                      finsi
              finsi
    finsi
fin tant que
```

Figure 1. – Algorithme de Dichotomie

une alternative serait d'utiliser la méthode simplexe sous une forme duale pour résoudre la relaxation en continu $(\overline{P})$.

Le nombre d'itérations est majoré par $2+\lceil -\log_2 \epsilon \rceil$ et chaque itération nécessite la résolution de la relaxation en continu d'un problème de sac à dos. Nous utilisons pour ce faire la procédure de complexité linéaire en moyenne NKR77 [FAPL82].

Cas entier

Pour la résolution du dual *surrogate* (S), l'algorithme de dichotomie précédent est modifiable de telle sorte à remplacer le critère d'arrêt d'ϵ-optimalité par un critère d'arrêt d'optimalité duale.

La modification essentielle suggérée par Glover [GLO65] par rapport à une recherche dichotomique standard, est d'utiliser les renseignements fournis par la solution optimale $x^*(\mu)$ de la relaxation *surrogate* courante $(S(\mu))$.

Ces modifications sont la conséquence des propriétés suivantes, qui permettent de définir un algorithme de dichotomie étendue (fig. 2), assurant la preuve de l'optimalité duale ou primale en un nombre fini d'itérations [FRPL93].

PROPOSITION 6 : *Soient* $\mu^\circ \in [0, +\infty]$, $x^*(\mu^\circ)$ *une solution optimale de* $(S(\mu^\circ))$ *non primale réalisable et le scalaire* $\alpha = \dfrac{b_1 - A_1 x^*(\mu^\circ)}{A_2 x^*(\mu^\circ) - b_2}$

■ *si* $A_2 x^*(\mu^\circ) > b_2$ *alors*

(i) $\alpha \geq \mu^\circ$ *avec égalité si et seulement si* $x^*(\mu^\circ)$ *sature la contrainte* surrogate

$$(A_1 + \mu^\circ A_2)\, x^*(\mu^\circ) \leq b_1 + \mu^\circ b_2.$$

(ii) $\forall \mu \in [0, \alpha] \qquad \varphi(\mu) \geq \varphi(\mu^\circ)$,

■ *si* $A_1 x^*(\mu^\circ) > b_1$ *alors*

(i) $\alpha \leq \mu^\circ$ *avec égalité si et seulement si* $x^*(\mu^\circ)$ *sature la contrainte* surrogate

$$(A_1 + \mu^\circ A_2)\, x^*(\mu^\circ) \leq b_1 + \mu^\circ b_2.$$

(ii) $\forall \mu \in [\alpha, +\infty] \qquad \varphi(\mu) \geq \varphi(\mu^\circ)$.

Preuve : voir [FRPL93] ♦

Cette proposition généralise la proposition 5 et assure de pouvoir continuer la recherche unidimensionnelle du minimum de la fonction duale quasi-convexe $\varphi(\bullet)$ à partir de α et non de μ. L'occurrence de l'optimalité duale est donnée dans le résultat suivant :

PROPOSITION 7 : *Soient* $0 \leq \mu_g < \mu_d \leq 1$, $x^*(\mu_g)$ et $x^*(\mu_d)$ *les solutions optimales respectives de* $(S(\mu_g))$ *et* $(S(\mu_d))$ *supposées non primales* *réalisables,* α_g *et* α_d *les bornes définies par*

$$\alpha_g = \frac{b_1 - A_1\, x^*\,(\mu_g)}{A_2\, x^*\,(\mu_g) - b_2} \qquad \alpha_d = \frac{b_1 - A_1\, x^*\,(\mu_d)}{A_2\, x^*\,(\mu_d) - b_2}$$

Supposons que

$$A_1\, x^*\,(\mu_g) \ \leq \ b_1 \text{ (resp. } A_1\ x^*\,(\mu_d) \ > \ b_1)$$

et

$$A_2\, x^*\,(\mu_g) \ > \ b_2\ (A_2\, x^*\,(\mu_d) \leq b_2);$$

si $\alpha_g > \alpha_d$ *alors* $v\,(S) = \min\,\{cx^*\,(\mu_g),\ cx^*\,(\mu_d)\}$.

Preuve : voir [FRPL93] ♦

Enfin nous avons le résultat essentiel suivant :

PROPOSITION 8 : L'algorithme de dichotomie étendue converge en un nombre fini d'itérations.

Preuve : voir [FRPL93] ♦

Le nombre d'itérations est maintenant indépendant d'une quelconque précision ϵ. En pratique les expériences numériques menées sur des instances de taille allant jusque 1 000 variables, montrent que l'optimalité duale est atteinte en moyenne en 7 ou 8 itérations. Chaque itération nécessite la résolution d'un problème de sac à dos en variables 0-1 avec la contrainte à coefficients réels. Ce problème est résolu par une modification de l'algorithme FPK79 ([FAPL82], [BOP91]).

3. EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES

Les expériences numériques sont relatives aux performances de l'algorithme d'ENCADREMENT présenté en section 2.2.1. Plus précisément nous avons indiqué selon les cas, soit les bornes L et U, soit la largeur de l'intervalle de validité $U–L+1$, obtenues respectivement par les trois modules de l'algorithme implantés dans l'ordre suivant :

– approche de Glover

– phase en continu

– phase en entier,

ainsi que leurs temps de calcul exprimés en secondes sur une station SUN 3/50.

Les résultats de la table 1 concernent 25 problèmes tests de la littérature ([MAMA57], [PET67], [WENE67], [SETO68], [FRPL90]). Il faut d'abord noter que dans 5 cas (*), l'égalité des bornes calculées $v(P) = cx$ et $v(S)$

```
{intervalle de confiance}
fin:=faux;
résoudre (S(1)); si v(S(1)) < v(P) alors fin:=vrai  { v(S) < v(P) } finsi ;
si x*(1) est primale réalisable
    alors v((S):=cx*(1) ; fin:=vrai  { v(S) = v(P) }
    sinon α:=(b1-A1x*(1))/(A2x*(1)-b2)
          si A1x*(1)>b1
               alors résoudre (S(0)); si v(S(0)) < v(P) alors fin:=vrai  { v(S) < v(P) } finsi ;
                     si A2x*(0)≤b2
                          alors v(S):=cx*(0); fin:=vrai { v(S) = v(P) }
                          sinon αg:=(b1-A1x*(0))/(A2x*(0)-b2); αd:=α
                     finsi
               sinon résoudre (S(∞)); si v(S(∞)) < v(P) alors fin:=vrai  { v(S) < v(P) } finsi ;
                     si A1x*(∞)≤b1
                          alors v(S):=cx*(∞); fin:=vrai { v(S) = v(P) }
                          sinon αg:=(A2x*(∞)-b2)/(b1-A1x*(∞)); αd:=1/α;
                                permuter les 2 contraintes
                     finsi
          finsi
finsi ;
μg:=0; μd:=1;

{dichotomie}
tant que ¬ fin faire
    si αg ≥ αd
          alors v(S):=min {cx*(μg);cx*(μd)}; fin:=vrai  {optimalité duale}
          sinon μ:=(αg+αd)/2;résoudre (S(μ));
                si v(S(μ)) < v(P) alors fin:=vrai  { v(S) < v(P) } finsi ;
                si x*(μ) est primale réalisable
                     alors v(S):=cx*(μ); fin:=vrai { v(S) = v(P) }
                     sinon α:=(b1-A1x*(μ))/(A2x*(μ)-b2)
                           si A2x*(μ)>b2
                                alors αg:=α; μg:=μ
                                sinon αd:=α; μd:=μ {A1x*(μ)>b1}
                           finsi
                finsi
    finsi
fin tant que
```

Figure 2. – Algorithme de Dichotomie étendue

permet de conclure à l'optimalité de la solution réalisable x. Dans les autres cas, les bornes de Glover [GLO85] sont améliorées de manière significative.

La table 2 montre que l'algorithme d'ENCADREMENT est très efficace sur des instances tirées au hasard selon la loi uniforme ($A_{ij} \in U(0,100)$,

TABLE I
Encadrement de la somme des variables pour les problèmes tests de la littérature

Problème	taille	Phase Glover			Phase en continu			Phase en entier		
	$m\times n$	L	U	temps	L	U	temps	L	U	temps
[PET67]	10×6	2	5	0,02	3	4	0,14	3	4	0,02
	10×10	3	9	0,04	3	7	0,22	3	6	0,26
	10×15	7	13	0,04	8	13	0,16	8	10	0,38
	10×20	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)
	10×28	12	25	0,10	14	20	0,64	15	18	0,48
	5×39	10	37	0,06	21	34	0,78	22	33	1,14
	5×50	13	47	0,08	24	42	1,28	25	40	3,42
[FRPL90] . . .	4×27	6	25	0,04	11	24	0,44	13	23	1,12
	4×34	8	30	0,04	13	29	0,64	13	28	0,76
	2×19	2	12	0,00	2	6	0,44	3	5	0,56
	2×29	6	24	0,02	11	20	0,66	12	18	1,42
	10×20	8	13	0,06	8	13	0,20	8	11	0,22
	30×40	6	26	0,32	6	16	1,72	6	16	0,84
	30×37	14	29	0,30	14	21	1,66	15	21	1,36
[MAMA57] . .	6×21	7	12	0,04	7	9	0,48	7	8	0,28
[SETO68] . . .	30×60	17	43	0,50	17	27	4,24	17	27	1,10
	30×60	30	49	0,50	30	37	3,98	31	37	1,80
[WENE68] . . .	2×28	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)
	2×28	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)
	2×28	5	19	0,02	5	9	0,76	6	8	0,64
	2×28	7	22	0,02	9	18	0,70	9	17	0,24
	2×28	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)
	2×28	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)
	2×105	81	101	0,06	86	91	2,24	87	90	0,62
	2×105	17	57	0,08	27	36	3,70	28	34	2,52

(*) les calculs permettent de conclure à l'optimalité de la solution heuristique car $v(P) = v(S)$.

$c_j \in U(1{,}1000)$). Globalement la largeur de l'intervalle de validité U–L+1 obtenue par l'approche de Glover est divisée en moyenne par 11.4 grâce à cette nouvelle approche ($n = 100 \rightarrow 16.8/2.7$; $n = 250 \rightarrow 40.4/4.1$; $n = 500 \rightarrow 78.6/5.0$).

D'autre part, il apparaît très clairement que les performances sont d'autant meilleures que le nombre de contraintes est petit. Si, comme on pouvait s'y attendre, la largeur U–L+1 augmente en valeur absolue avec le nombre de variables, il faut noter que le rapport (U–L+1)/n diminue ($n = 100 \rightarrow 2.76\ 10^{-2}$; $n = 250 \rightarrow 1.64\ 10^{-2}$; $n = 500 \rightarrow 1.00\ 10^{-2}$).

Enfin nous avons testé l'influence du second membre b sur les performances de l'algorithme en corrélant chaque b_i à la somme des coefficients A_{ij} de la contrainte i de la manière suivante :

TABLE II
Encadrement de la somme des variables pour les instances tirées au hasard suivant la loi uniforme

Problème	taille	Phase Glover		Phase en continu		Phase en entier	
	$m \times n$	U–L+1	temps	U–L+1	temps	U–L+1	temps
α = 0,2 β = 0,6 . .	2×100	20,0	0,06	3,4	5,49	2,7	1,09
	2×250	41,7	0,16	4,2	23,60	3,7	2,76
	2×500	76,6	0,32	4,6	61,95	4,0	5,80
	5×100	16,5	0,15	3,1	5,22	2,5	0,97
	5×250	40,8	0,38	4,5	23,12	3,6	3,49
	5×500	84,6	0,74	5,2	64,35	4,7	5,72
	10×100	18,1	0,28	3,7	6,38	3,2	1,51
	10×250	44,7	0,70	5,2	23,17	4,3	3,59
	10×500	85,2	1,52	6,7	75,47	6,0	8,15
α = 0,2 β = 0,2 . .	2×100	15,2	0,06	2,8	4,62	2,0	0,88
	2×250	47,3	0,16	5,2	23,13	4,1	3,23
	2×500	84,9	0,34	5,6	68,56	4,3	7,59
	5×100	18,8	0,14	3,8	5,77	3,3	1,24
	5×250	44,8	0,38	5,7	28,09	5,2	4,41
	5×500	90,6	0,74	6,6	74,32	5,8	10,13
	10×100	20,8	0,28	4,0	7,57	3,3	2,12
	10×250	49,0	0,70	5,8	29,29	5,2	5,02
	10×500	97,1	1,50	7,0	167,90	6,7	10,93
α = 0,6 β = 0,2 . .	2×100	14,4	0,06	2,6	4,78	2,0	0,54
	2×250	28,8	0,17	4,2	20,67	3,3	2,64
	2×500	59,8	0,32	4,6	61,73	3,8	6,26
	5×100	11,4	0,15	2,7	4,24	2,4	0,71
	5×250	30,4	0,36	4,2	21,21	3,2	3,13
	5×500	61,4	0,78	4,5	63,56	4,2	5,18
	10×100	16,0	0,29	4,1	5,52	3,5	1,26
	10×250	36,1	0,73	5,2	25,46	4,5	3,71
	10×500	67,7	1,46	6,4	72,96	5,7	13,94

$$b_i = (\alpha + \beta r_i) \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \qquad \text{avec} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R},$$
$$r_i \in \mathbf{U}(0, 1) \qquad \text{tel que} \quad \alpha + \beta r_i \in]0, 1[, \qquad i = 1, \ldots, m$$

Les meilleurs résultats sont obtenus pour les instances dont toutes les contraintes sont relativement peu serrées ($\alpha = 0.6$; $\beta = 0.2$). A l'opposé, les résultats les moins bons concernent les instances à contraintes serrées ($\alpha = 0.2$; $\beta = 0.2$).

L'amélioration des bornes L et U implique un accroissement du coût en temps calcul non négligeable, qui est cependant contrôlé en complexité si on se limite à la phase en continu. Mais surtout, l'obtention de bornes très serrées doit permettre pour les instances de grande taille d'éviter beaucoup plus efficacement l'explosion combinatoire des méthodes énumératives. Ainsi le temps « perdu » dans la phase de prétraitement pourrait être regagné largement dans la phase de résolution exacte. Les expériences en cours complètent une première approche de résolution exacte du sac à dos bidimensionnel en variables 0-1 par énumération implicite [FRPL92*b*].

4. CONCLUSION

Dans le cadre de la résolution du dual *surrogate* du sac à dos bidimensionnel en variables 0-1, nous avons présenté une procédure du type dichotomique, soit exacte, soit approchée lorsque les contraintes d'intégralité sont relâchées.

Cette procédure a permis la définition d'une nouvelle méthode d'encadrement de la somme des variables fixées à 1 à l'optimum du problème du sac à dos multidimensionnel en variables 0-1. Des résultats très encourageants ont été obtenus, en particulier pour les instances de grande taille.

Inclue dans une phase de prétraitement, cette technique devrait permettre d'améliorer sensiblement les méthodes d'énumération implicite utilisées pour la résolution exacte des problèmes de sac à dos en variables 0-1 à 2 dimensions et plus. Des expériences sont en cours dans le cas bidimensionnel.

REFERENCES

[BOPL91] P. Bourgeois and G. Plateau, BPK90 : A Revisited Hybrid Algorithm for the 0-1 Knapsack Problem, Publication LIPN, 1991, n° 91-2. Université Paris-Nord.

[DYE80] H. E. Dyer, Calculating Surrogate Constraints, *Mathematical Programming 19*, 1980, p. 255-278.

[FAPL82] D. Fayard and G. Plateau, An Algorithm for the Solution of the 0-1 Knapsack Problem, *Compting*, 1982, *28*, p. 269-287.

[FAPL92] D. Fayard and G. Plateau, An Exact Algorithm for the 0-1 Collapsing Knapsack Problem. Proceedings de la conférence "Viewpoints on Optimization", Grimentz, Suisse, Août 1990, à paraître dans *Discrete Applied Mathematics*.

[FLP90] A. Fréville, L. A. N. Lorena and G. Plateau, A Monotone Decreasing Algorithm for Solving the Surrogate Dual of 0-1 Multiknapsack Problems, *Publication LIPN*, 1990, n° 90-13, Université Paris-Nord.

[FRE91] A. Fréville, Contribution à l'optimisation en nombres entiers, Thèse d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Nord, 1991.

[FRPL86] A. Fréville and G. Plateau, Heuristics and Reduction Methods for Multiple Constraints 0-1 Linear Programming Problems, *European Journal of Operational Research*, 1986, *24*, p. 206-215.

[FRPL90] A. Fréville and G. Plateau, Hard 0-1 Multiknapsack Test Problems for Size Reduction Methods, *Investigation Operativa 1*, 1990, p. 251-270.

[FRPL92a] A. Fréville and G. Plateau, An Efficient Preprocessing Procedure for the Solution of the 0-1 Multiknapsack Problem, Proceedings de la conférence "Viewpoints on Optimization", Grimentz, Suisse, août 1990, à paraître dans *Discrete Applied Mathematics*.

[FRPL92b] A. Fréville and G. Plateau, FPBK92 : An Implicit Enumeration Code for the Solution of the 0-1 Bidimensional Knapsack Problem Based on Surrogate Duality, Graphs and Optimization Colloquium, Grimentz, Suisse, août 1992.

[FRPL93] A. Fréville and G. Plateau, SADE^2 : An Exact Algorithm for Solving the Biknapsack Surrogate Dual, à paraître dans *European Journal of Operational Research*, *66*, 1993.

[GAPI85] B. Gavish and H. Pirkul, Efficient Algorithms for Solving Multiconstraint Zero-One Knapsack Problems to Optimality, *Mathematical Programming*, 1985, *31*, p. 78-105.

[GLO65] F. Glover, A Multiphase Dual Algorithm for the Zero-One Integer Programming Problem *Operations Research*, 1965, *13* (6), p. 879-919.

[MAMA57] A. S. Manne and H. M. Markowitz, On the Solution of Discrete Programming Problems, *Econometrica*, 1957, *25*, p. 84-110.

[MATO92] S. Martello and P. Toth, Exact Solution of Hard Knapsack Problems, EURO XII-TIMS XXXI, Helsinki, Finlande, juin 1992.

[PET67] C. C. Petersen, Computational Experience With Variants of the Balas Algorithm Applied to the Selection for R & D Projects, *Management Science*, 1967, *13* (9), p. 736-750.

[SETO68] S. Senju and Y. Toyoda, An Approach to Linear Programming with 0-1 Variables, *Management Science*, 1968, *15* (4), p. 196-205.

[WENE67] H. M. Weingartner and D. N. Ness, Method for the Solution of the Multidimensional 0-1 Knapsack Problem, *Operations Research*, 1967, *15* (1), p. 83-103.