

MARC BUI

**Résolution du problème du multi-rendezvous à  
l'aide d'un modèle d'algorithme distribué**

*Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche  
opérationnelle. Recherche opérationnelle*, tome 27, n° 2 (1993),  
p. 249-264.

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1993\\_\\_27\\_2\\_249\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1993__27_2_249_0)

© AFCET, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## RÉSOLUTION DU PROBLÈME DU MULTI-RENDEZVOUS À L'AIDE D'UN MODÈLE D'ALGORITHME DISTRIBUÉ (\*)

par Marc BUI (<sup>1</sup>)

Communiqué par Catherine ROUCAIROL

---

*Résumé.* – Dans cet article, nous proposons, à l'aide de notre modèle d'algorithme distribué, d'effectuer une évaluation théorique du problème du multi-RendezVous. Nous proposons une règle de fonctionnement optimale qui est établie à partir d'une résolution analytique des critères d'optimalité définis à l'aide du modèle.

Mots clés : Algorithmique distribuée, problème du multi-rendez-vous, optimisation, évaluation de performances.

*Abstract.* – In this paper, we present with the help of our model of Distributed Algorithm a theoretical analysis of the multiway-RendezVous. We propose an optimal functioning rule that is defined by analytical resolution of criteria issued from the modelisation.

Keywords: Distributed computing, multi-rendez-vous problem, optimization and variational technics, performance evaluation.

### 1. INTRODUCTION

Le concept du multi-RendezVous a été élaboré pour réaliser des communications synchrones entre un nombre arbitraire de processus. Diverses implémentations ont été proposées, on en trouve les principales versions dans [1] et [4]. L'objet de cet article est de présenter une évaluation théorique de ce problème à l'aide de notre modèle stochastique d'algorithme distribué ([3] et [2]). Il s'agit de déterminer la règle optimale théorique, et de voir quelle implémentation se rapproche le plus de cette règle. Notre modèle stochastique se présente sous la forme d'un réseau de plusieurs chaînes de Markov homogènes n'ayant chacune qu'une seule classe ergodique sans cycle dont l'interconnexion se traduit par des relations entre des termes de leurs matrices de transition. Nous avons ensuite à définir une fonction dite de choix  $f$ , puis à trouver la ou les solutions (c'est-à-dire les valeurs pour les termes des matrices de transition) qui rend(ent) optimum cette fonction de choix.

---

(\*) Reçu en décembre 1991.

(<sup>1</sup>) Université Paris et INRIA, 29, rue Joseph Fouriaux, 92160 Antony.

Ces solutions sont les règles de fonctionnement optimales recherchées. La résolution est faite analytiquement.

## 2. LE MODÈLE DANS SA GÉNÉRALITÉ

Dans cette section, nous présentons notre modèle dans le cas général dont l'objectif est de permettre la description et l'analyse du comportement d'algorithmes distribués avant de l'appliquer au cas du problème du Multi-RendezVous.

Un système distribué [5] est une structure logicielle et matérielle répartie en un réseau de processus qui traitent l'information par échange de messages. Ce réseau est composé de site (ou processus) et d'un système de communication.

Chaque site correspond au niveau matériel à un processeur associé à une unité de mémoire qui lui est locale et au niveau logiciel à un processus (algorithme) séquentiel muni de primitives de communications.

Avec l'apparition de machines réellement distribuées, la conception d'algorithmes adaptés à ces machines se pose en de nouveaux termes. En particulier pour les algorithmes de contrôle dont le rôle est de gérer ces systèmes distribués [5].

Dans ce contexte, afin de résoudre les problèmes rencontrés pour l'élaboration d'un système d'exploitation distribué, la mise en place d'un modèle théorique d'étude des problèmes se révèle nécessaire. En effet, il faut saisir les mécanismes du distribué, mettre en évidence les problèmes, prouver l'existence de solutions, et les améliorer afin d'avoir des solutions optimales.

Dans le cadre des problèmes algorithmiques en environnement distribué, il apparaît que la nécessité d'assurer le contrôle des systèmes opératoires distribués asynchrones à grand nombre de processeurs implique aussi la mise en œuvre d'une méthode de surveillance. Nous proposons pour notre part une solution à partir de notre modèle basée sur une approche observationnelle.

Une telle méthode permet de mettre en évidence les paramètres sur lesquels il faut agir pour conserver, voire conférer au fonctionnement d'un algorithme les propriétés d'exécution qu'on souhaite lui voir adopter.

L'utilisation de notre modèle permet de donner accès à de telles possibilités et aussi des possibilités d'auto-réglage du réseau en temps réel (par exemple l'apprentissage de la dérive du fonctionnement). Ceci fournit des outils qualitativement nouveaux pour la maîtrise des systèmes distribués.

Soient  $N$  chaînes de Markov (homogènes, finies) dont les espaces d'états sont  ${}^k\mathcal{X}=\{1, \dots, r\}$ , ( $k=1, \dots, N$ ) et dont les matrices de passage sont

respectivement  ${}^kM$ , ( $k=1, \dots, N$ ). La notation  ${}^kM$  traduit en réalité le fait que chacune de ces matrices de passage dépend d'un paramètre multidimensionnel  $\rho_k$  qui la caractérise, par exemple  $\rho_k=({}^k p_{11}, \dots, {}^k p_{ij}, \dots, {}^k p_{rr})$ . Ce sont donc des matrices  $M_{\rho_k}$ .

Le système distribué est constitué d'un réseau de processus interconnectés entre eux, il est représenté au plan fonctionnel par une interconnexion de chaînes de Markov. Il existe alors un ensemble de relations entre les paramètres  $\rho_1, \dots, \rho_N$  qui définit et caractérise le réseau :

$$\mathcal{R}_j(\rho_1, \dots, \rho_N) = 0, \quad j = 1, \dots, N$$

Autrement dit, la connexion des  $N$  chaînes de Markov en réseau se traduit par une ou des relations entre les paramètres  $\rho_1, \dots, \rho_N$ . Ces relations constituent des *contraintes* (qui éventuellement peuvent être linéaires). Lorsqu'un  $\rho=(\rho_1, \dots, \rho_N)$  vérifie les relations de type précédent, nous noterons en abrégé  $\rho \in \mathcal{R}$ .

Quelle que soit la chaîne de Markov de numéro  $k$ , supposons qu'il n'existe qu'une seule classe ergodique sans cycle (que nous notons  ${}^k\mathcal{E}$ ) et au plus une classe de passage (que nous notons  ${}^k\mathcal{P}$ , ce  ${}^k\mathcal{P}$  peut éventuellement être vide). C'est la condition (C). Pour la chaîne n°  $k$ , si  $i \in {}^k\mathcal{E}$ , notons  ${}^kT_i$  le temps moyen de retour à l'état  $i$  (c'est-à-dire  ${}^kT_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ , où  $f_{ii}^{(n)}$  désigne la probabilité pour que partant de l'état  $i$ , l'on revienne à  $i$  pour la première fois en  $n$  étapes). Ces  ${}^kT_i$  sont calculés à l'aide de  $1/\lim_{n \rightarrow \infty} {}^k m_{ji}^{(n)}$ , lequel est indépendant de  $j$ , où  ${}^k m_{ji}^{(n)}$  désigne le terme  $(j, i)$  de la matrice  $({}^kM)^n$ .

Toujours pour la chaîne n°  $k$ , si  $j$  et  $j' \in {}^k\mathcal{P}$ , notons  ${}^kS_{jj'}$  le temps moyen total de séjour dans  $j'$  partant de  $j$ . Ces  ${}^kS_{jj'}$  sont donnés par la matrice  $(I - {}^kW)^{-1}$  où  ${}^kW$  est la sous-matrice, restriction de  ${}^kM$  aux états transitoires (états de  ${}^k\mathcal{P}$ ).

Nous appelons *fonction de choix*, toute fonction réelle  $f$  des  ${}^kT_i$  et  ${}^kS_{jj'}$ ,  $i \in {}^k\mathcal{E}$ ,  $j$  et  $j' \in {}^k\mathcal{P}$ , et  $k \in \{1, \dots, N\}$ . Puisque les  ${}^kT_i$  et  ${}^kS_{jj'}$  s'expriment en fonction des termes des matrices  $({}^kM)^n$ , donc en fonction des  $\rho_k$ , la fonction  $f$  est une fonction des variables  $\rho_k$ . La définition d'une fonction de choix  $f$  présuppose que le réseau vérifie la condition (C).

Pour chaque problème, suivant son contexte, une fonction de choix  $f$  sera définie, dont le rôle est celui de « guide » du fonctionnement du système : c'est sur elle que se basent les critères d'optimalité.

Un critère d'optimalité se traduit par l'optimisation (la maximisation ou la minimisation) d'une fonction de choix  $f$ , tenant compte de ses contraintes.

Notre modèle basé sur un réseau de chaînes de Markov, est un quadruplet  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}^0, \mathcal{T}, \mathcal{F})$  où :

- $\mathcal{S}$  est l'ensemble d'états-du-système qui est ici l'ensemble  $\mathcal{X}^N$
- $\mathcal{S}^0$  est l'ensemble d'états-initiaux-du-système qui est ici un sous-ensemble de  $\mathcal{S}$
- $\mathcal{T}$  est un ensemble de règles de fonctionnement. Chaque règle de fonctionnement, notée ici  $M_\rho$ , est un  $N$ -uplet de matrices de passage  $(M_{\rho_1}, \dots, M_{\rho_N})$ , où  $\rho \in \mathcal{R}$ .

Nous ne nous intéressons qu'aux règles de fonctionnement auxquelles on peut associer une fonction de choix  $f$  [c'est-à-dire qu'aux règles de fonctionnement relatives à un réseau de Markov vérifiant la condition (C)]. Une règle de fonctionnement  $M_\rho$  est dite optimale si et seulement si son  $\rho$  rend maximum (resp. minimum) la fonction de choix  $f$  lorsque le critère d'optimalité imposé est la maximisation (resp. minimisation) de  $f$ . Une règle de fonctionnement  $M_\rho$  est dite mauvaise si et seulement si son  $\rho$  rend maximum (resp. minimum) la fonction de choix  $f$  alors que le critère d'optimalité imposé est la minimisation (resp. maximisation) de  $f$ . Toute règle de fonctionnement qui n'est pas mauvaise est dite judicieuse. Les règles de fonctionnement optimales ou judicieuses sont des bonnes règles de fonctionnement.

- Pour chaque problème traité, il s'agit de trouver une (ou des) règle(s) de fonctionnement optimale(s), ou à défaut, des règles de fonctionnement judicieuses. Nous notons  $\mathcal{B} = \{M_\rho, \rho \in \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}\}$ , ce sous-ensemble de  $\mathcal{T}$ , c'est l'ensemble des bonnes règles de fonctionnement du problème.

### 3. LE MODÈLE DANS LE CAS DU PROBLÈME DU MULTI-RENDEZVOUS

Le modèle étudié se présente sous forme d'un réseau de  $N$  chaînes de Markov homogènes à  $r$  états  $i=1, \dots, r, r \geq 4$  et dont la matrice de passage, pour la chaîne de Markov n°  $k$ , est :

$${}^k P = \begin{pmatrix} a_k & 1 - a_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k^{(3)} & \dots & c_k^{(r-1)} & 1 - b_k - \sum_{j=3}^{r-1} c_k^{(j)} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a_k < 1 \\ b_k > 0 \\ c_k^{(j)} > 0, \quad j = 3, \dots, r-1 \\ b_k + \sum_{j=3}^{r-1} c_k^{(j)} < 1 \end{array} \right. \quad (1)$$

4. LES CONTRAINTES DE FONCTIONNEMENT EN RÉSEAU

Le réseau est constitué grâce aux liaisons suivantes (2), (3) qui s'expriment sous forme de contraintes :

$$L_1 \equiv \sum_{k=1}^N a_k + 1 - N = 0 \quad (2)$$

$$L_2 \equiv \sum_{k=1}^N b_k - 1 = 0 \quad (3)$$

5. ÉVOLUTION DU SYSTÈME

C'est un réseau de chaînes de Markov dont chacune n'a qu'une seule classe ergodique sans cycle et n'a pas de classe de passage. Par conséquent,  $\forall k$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} ({}^k P)^n$  existe et est une matrice aux lignes identiques, dont chaque ligne vaut  ${}^k \Pi = ({}^k q_1 \dots {}^k q_r)$ .

Or, l'équation matricielle

$${}^k \Pi \cdot {}^k P = {}^k \Pi$$

s'écrit en détail

$$({}^k q_1 \dots {}^k q_r) \cdot \begin{pmatrix} a_k & 1 - a_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k^{(3)} & \dots & c_k^{(r-1)} & 1 - b_k - \sum_{j=3}^{r-1} c_k^{(j)} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = ({}^k q_1 \dots {}^k q_r)$$

ce qui conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k {}^k q_1 + \dots + {}^k q_r = {}^k q_1 \\ (1 - a_k) {}^k q_1 + b_k {}^k q_2 = {}^k q_2 \\ c_k^{(3)} {}^k q_2 = {}^k q_3 \\ c_k^{(4)} {}^k q_2 = {}^k q_4 \\ \vdots \\ c_k^{(r-1)} {}^k q_2 = {}^k q_{r-1} \\ \left( 1 - b_k - \sum_{j=3}^{r-1} c_k^{(j)} \right) {}^k q_2 = {}^k q_r \end{array} \right. \quad (4)$$

Et sachant que  $\sum_{j=1}^r {}^k q_j = 1$ , on a par addition membre à membre

$$1 = \left[ \frac{1 - b_k}{1 - a_k} + 2 - b_k \right] {}^k q_2$$

ce qui implique que

$${}^k q_2 = \frac{1 - a_k}{3 + a_k b_k - 2(a_k + b_k)}$$

Et par conséquent,

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^k q_1 = \frac{1 - b_k}{3 + a_k b_k - 2(a_k + b_k)} \\ {}^k q_2 = \frac{1 - a_k}{3 + a_k b_k - 2(a_k + b_k)} \\ {}^k q_3 = \frac{c_k^{(3)} (1 - a_k)}{3 + a_k b_k - 2(a_k + b_k)} \\ \vdots \\ {}^k q_{r-1} = \frac{c_k^{(r-1)} (1 - a_k)}{3 + a_k b_k - 2(a_k + b_k)} \\ {}^k q_r = \frac{\left( 1 - b_k - \sum_{j=3}^{r-1} c_k^{(j)} \right) (1 - a_k)}{3 + a_k b_k - 2(a_k + b_k)} \end{array} \right.$$

D'où en désignant  ${}^kT_j$  le temps moyen de retour à l'état  $j$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^kT_1 = \frac{3 + a_k b_k - 2(a_k + b_k)}{1 - b_k} \\ {}^kT_2 = \frac{3 + a_k b_k - 2(a_k + b_k)}{1 - a_k} \\ {}^kT_3 = \frac{3 + a_k b_k - 2(a_k + b_k)}{c_k^{(3)}(1 - a_k)} \\ \vdots \\ {}^kT_{r-1} = \frac{3 + a_k b_k - 2(a_k + b_k)}{c_k^{(r-1)}(1 - a_k)} \\ {}^kT_r = \frac{3 + a_k b_k - 2(a_k + b_k)}{\left(1 - b_k - \sum_{j=3}^{r-1} c_k^{(j)}\right)(1 - a_k)} \end{array} \right.$$

**6. CRITÈRE D'OPTIMALITÉ : DÉTERMINATION**

Nous procédons en 2 étapes :

**6.1. 1<sup>ère</sup> étape**

Minimiser les temps moyens de retour à l'état 2, c'est-à-dire Minimiser

$$F \equiv \sum_{k=1}^N {}^kT_2 = \sum_{k=1}^N \frac{3 + a_k b_k - 2(a_k + b_k)}{1 - a_k}$$

sous les contraintes [relation (1), (2), (3)]

**6.2. 2<sup>e</sup> étape**

Si le problème de la première étape possède une solution  $(\hat{a}_k, \hat{b}_k)_{k=1, \dots, N}$  (au besoin, nous apporterons de légères modifications aux contraintes pour trouver une telle solution), la deuxième consiste à minimiser

$$G \equiv \sum_{k=1}^N \left( \sum_{j=3}^r {}^kT_j(\hat{a}_k, \hat{b}_k) \right) = \sum_{k=1}^N \frac{3 + \hat{a}_k \hat{b}_k - 2(\hat{a}_k + \hat{b}_k)}{1 - \hat{a}_k} \left( \sum_{j=3}^{r-1} \frac{1}{c_k^{(j)}} + \frac{1}{1 - \hat{b}_k - \sum_{j=3}^{r-1} c_k^{(j)}} \right)$$



sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} c_k^{(j)} > 0, \quad j = 3, \dots, r-1 \\ \hat{b}_k + \sum_{j=3}^{r-1} c_k^{(j)} < 1 \end{array} \right.$$

## 7. ÉTUDE DU PROBLÈME DE LA 1<sup>ère</sup> ÉTAPE

### 7.1. La solution de l'équité n'est pas une bonne solution

Nous constatons que

$$\begin{aligned} F &\equiv \sum_{k=1}^N \frac{3 + a_k b_k - 2(a_k + b_k)}{1 - a_k} \\ &= \sum_{k=1}^N \left( 2 - b_k + \frac{1 - b_k}{1 - a_k} \right) \\ &= (2N - 1) + \sum_{k=1}^N \frac{1 - b_k}{1 - a_k} \end{aligned}$$

Cela revient à minimiser  $H \equiv \sum_{k=1}^N (1 - b_k)/(1 - a_k)$  sous les contraintes (1), (2) et (3). En écrivant les conditions nécessaires de 1<sup>er</sup> ordre, avec les multiplicateurs de Lagrange relatifs aux contraintes  $L_1$  et  $L_2$  nous avons :

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} + \lambda \frac{\partial L_1}{\partial a_k} + \mu \frac{\partial L_2}{\partial a_k} = \frac{1 - b_k}{(1 - a_k)^2} + \lambda = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial b_k} + \lambda \frac{\partial L_1}{\partial b_k} + \mu \frac{\partial L_2}{\partial b_k} = \frac{-1}{1 - a_k} + \mu = 0 \quad (6)$$

Les équations (6) donnent :

$$\frac{1}{1 - a_k} = \mu = \frac{N}{\sum_{k=1}^N (1 - a_k)} = \frac{N}{N - (N - 1)} = N$$

c'est-à-dire

$$\tilde{a}_k = \frac{N - 1}{N}$$

Les équations (5) donnent alors

$$\frac{1 - b_k}{(1 - a_k)^2} = -\lambda = \frac{1 - b_k}{1/N^2} = \frac{\sum_{k=1}^N (1 - b_k)}{1/N} = N(N - 1)$$

c'est-à-dire

$$\tilde{b}_k = \frac{1}{N}$$

La solution unique trouvée est donc l'équité

$$(\tilde{a}_k, \tilde{b}_k) = \left( \frac{N - 1}{N}, \frac{1}{N} \right), \quad k \in \{1, \dots, N\}$$

Mais cette solution de l'équité ne donne pas le **minimum** (et on peut donc trouver de meilleures solutions) ; elle est donc à rejeter. Nous effectuons donc une étude plus détaillée.

### 7.2. Une minimisation en 2 sous-étapes

1) Nous fixons d'abord  $b=(b_1, \dots, b_N)$ , et nous minimisons  $H(a, b)$  par rapport à  $a=(a_1, \dots, a_N)$  sous les contraintes

$$\begin{cases} 0 < a_k < 1, & k \in \{1, \dots, N\} \\ L_1 \equiv \sum_{k=1}^N a_k + 1 - N = 0 \end{cases}$$

Les conditions nécessaires du 1<sup>er</sup> ordre (en désignant par  $\lambda$  le multiplicateur de Lagrange concernant  $L_1$ ) donnent :  $\forall k \in \{1, \dots, N\}$

$$\frac{\partial}{\partial a_k} H(a, b) = \frac{1 - b_k}{(1 - a_k)^2} + \lambda = 0$$

Or,  $(1-b_k)/(1-a_k)^2$  est positif. Nous avons donc

$$\frac{\sqrt{1 - b_k}}{1 - a_k} = \sqrt{-\lambda} = \frac{\sum_{j=1}^N \sqrt{1 - b_j}}{\sum_{j=1}^N (1 - a_j)} = \sum_{j=1}^N \sqrt{1 - b_j}$$

D'où

$$\hat{a}_k = 1 - \frac{\sqrt{1 - b_k}}{\sum_{j=1}^N \sqrt{1 - b_j}} \quad (7)$$

Or la fonction  $(a_1, \dots, a_N) \rightarrow \sum_{k=1}^N (1 - b_k)/(1 - a_k)^2$  est convexe, la solution  $\hat{a} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_N)$  correspond un minimum.

2) En remplaçant  $a$  par  $\hat{a}$  dans l'expression de  $H(a, b)$  nous avons

$$H(\hat{a}, b) = \left( \sum_{k=1}^N \sqrt{1 - b_k} \right)^2$$

à minimiser par rapport à  $b$ . Le problème est donc ramené à celui de minimiser la fonction

$$(b_1, \dots, b_N) \rightarrow \sum_{k=1}^N \sqrt{1 - b_k}$$

sous les contraintes (que nous modifions en « bornant » les  $b_k$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \leq b_k \leq 1 - \eta \quad \text{avec } 0 < \eta < \frac{1}{N}, \quad k \in \{1, \dots, N\} \\ \sum_{k=1}^N b_k = 1 \end{array} \right.$$

Comme la fonction  $(b_1, \dots, b_N) \rightarrow \sum_{k=1}^N \sqrt{1 - b_k}$  est strictement concave, le minimum ne peut être atteint qu'au bord de l'ensemble

$$\left\{ b = (b_1, \dots, b_N) \mid 0 < \eta \leq b_k \leq 1 - \eta, \sum_{k=1}^N b_k = 1 \right\}$$

Les seuls sommets-solutions possibles sont :  $(N-1)$  coordonnées égales à  $\eta$  et la dernière coordonnée égale à  $1 - (N-1)\eta$ .

En effet :

Les points aux coordonnées  $b_1 = \dots = b_p = \eta$  et  $b_{p+1} = \dots = b_N = 1 - \eta$ , sont éliminés (y compris  $p=0$  avec  $b_1 = \dots = b_N = 1 - \eta$ , et  $p=N$  avec  $b_1 = \dots = b_N = \eta$ )

car  $\sum_{k=1}^N b_k = p\eta + (N-p)(1-\eta) = 1$  implique que  $\eta = (N-p-1)/(N-2p) < 1/N$  c'est-à-dire  $p > N$ , ce qui est impossible. Quant aux points dont  $(N-1)$  coordonnées valent  $(1-\eta)$  et dont la coordonnée restante vaut  $1-(N-1)(1-\eta)$ , ils sont exclus, car du fait que  $\eta < 1/N$  et  $N \geq 3$ , on a  $1-(N-1)(1-\eta) - \eta < 0$ . Les seuls points valables sont donc ceux dont  $(N-1)$  coordonnées valent  $\eta$  et dont la coordonnée restante vaut  $1-(N-1)\eta$ . Et ce sont ces points là qui donnent l'optimum (le minimum) de la fonction.

Il y a ainsi en fait  $N!$  solutions équivalentes dont l'une d'elles est par exemple  $\hat{b}_1 = \dots = \hat{b}_{N-1} = \eta$ ,  $\hat{b}_N = 1-(N-1)\eta$  et la valeur minimum de  $\sum_{k=1}^N \sqrt{1-b_k}$  est alors  $(N-1)\sqrt{1-\eta} + \sqrt{(N-1)\eta}$ .  
D'où

**PROPOSITION 1 :** *Une des meilleures règles de fonctionnement, pour le problème de la première étape*

$$\text{Minimiser } F \equiv \sum_{k=1}^N {}^k T_2$$

sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a_k < 1 \\ \eta \leq b_k \leq 1 - \eta \text{ avec } 0 < \eta < \frac{1}{N}, \quad k \in \{1, \dots, N\} \\ \sum_{k=1}^N a_k = N - 1 \\ \sum_{k=1}^N b_k = 1 \end{array} \right.$$

est

$$\hat{a}_1 = \dots = \hat{a}_{N-1} = 1 - \frac{\sqrt{1-\eta}}{(N-1)\sqrt{1-\eta} + \sqrt{(N-1)\eta}}$$

et

$$\hat{a}_N = 1 - \frac{\sqrt{(N-1)\eta}}{(N-1)\sqrt{1-\eta} + \sqrt{(N-1)\eta}}$$

$$\hat{b}_1 = \dots = \hat{b}_{N-1} = \eta$$

et

$$\hat{b}_N = 1 - (N-1)\eta$$

Il existe  $(N!-1)$  autres solutions équivalentes qui s'obtiennent par permutation des coordonnées de la règle précédente.

### 8. ÉTUDE DU PROBLÈME DE LA 2<sup>e</sup> ÉTAPE

Ayant trouvé une bonne solution  $(\hat{a}_k, \hat{b}_k)_{k=1, \dots, N}$  du problème de la première étape, le problème de la 2<sup>e</sup> étape est donc de prouver  $(c_k^{(3)}, \dots, c_k^{(r-1)})_{k=1, \dots, N}$  qui rend minimum

$$G \equiv \sum_{k=1}^N \gamma_k \left( \sum_{j=3}^{r-1} \frac{1}{c_k^{(j)}} + \frac{1}{1 - \hat{b}_k - \sum_{i=3}^{r-1} c_k^{(i)}} \right)$$

où

$$\gamma_k = \frac{3 + \hat{a}_k \hat{b}_k - 2(\hat{a}_k + \hat{b}_k)}{1 - \hat{a}_k}$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} c_k^{(j)} > 0, & j \in \{3, \dots, r-1\} \\ \hat{b}_k + \sum_{k=3}^{r-1} c_k^{(j)} < 1 \end{cases}$$

1) Les conditions nécessaires du 1<sup>er</sup> ordre s'écrivent ici :  
 $\forall j \in \{3, \dots, N-1\}$

$$\frac{\partial G}{\partial c_k^{(j)}} = -\frac{1}{[c_k^{(j)}]^2} + \frac{1}{\left[1 - \hat{b}_k - \sum_{i=3}^{r-1} c_k^{(i)}\right]^2} = 0$$

ce qui implique que

$$c_k^{(j)} = 1 - \hat{b}_k - \sum_{i=3}^{r-1} c_k^{(i)}$$

vrai pour tout  $j \in \{3, \dots, r-1\}$ .

Donc

$$c_k^{(3)} = \dots = c_k^{(j)} = \dots = c_k^{(r-1)} = \dots = c_k$$

Ce qui implique que

$$c_k = 1 - \hat{b}_k - (r - 3) c_k$$

c'est-à-dire

$$c_k = \frac{1 - \hat{b}_k}{r - 2}$$

C'est la solution de l'équité à l'intérieur du même processus numéro  $k$  (nous pouvons l'appeler la solution de l'auto-équité). Plus explicitement, lorsque l'on prend  $\hat{b}_k = \eta$ ,  $c_k = (1 - \eta)/(r - 2)$  et lorsque l'on prend  $\hat{b}_k = 1 - (N - 1)\eta$ ,  $c_k = (N - 1)\eta/(r - 2)$ .

2) Cette solution donne bien un *minimum* pour la fonction  $G$ . En effet,

$$\frac{\partial^2 G}{\partial c_k^{(j)_2}} \equiv \frac{2}{(c_k^{(j)})^3} + \frac{2}{\left(1 - \hat{b}_k - \sum_{i=1}^{r-1} c_k^{(i)}\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial c_k^{(j)} \partial c_k^{(h)}} \equiv \frac{2}{\left(1 - \hat{b}_k - \sum_{i=1}^{r-1} c_k^{(i)}\right)^2}$$

En désignant par (pour  $3 \leq h \leq r - 1$ )

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial c_k^{(3)_2}} & \frac{\partial^2 G}{\partial c_k^{(3)} \partial c_k^{(4)}} & \cdots & \frac{\partial^2 G}{\partial c_k^{(3)} \partial c_k^{(h)}} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial c_k^{(4)} \partial c_k^{(3)}} & \frac{\partial^2 G}{\partial c_k^{(4)_2}} & \cdots & \frac{\partial^2 G}{\partial c_k^{(4)} \partial c_k^{(h)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 G}{\partial c_k^{(h)} \partial c_k^{(3)}} & \frac{\partial^2 G}{\partial c_k^{(h)} \partial c_k^{(4)}} & \cdots & \frac{\partial^2 G}{\partial c_k^{(h)_2}} \end{vmatrix}$$

le mineur principal  $\Delta_h$  du déterminant  $\Delta_r$  constitué par les  $(r - 2)^2$  dérivées partielles de  $G$ .

Comme

$$\frac{\partial^2}{\partial c_k^{(j)_2}} G(c_k, \dots, c_k) = d^2 + s^2$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial c_k^{(j)} \partial c_k^{(h)}} G(c_k, \dots, c_k) = s^2$$

où  $d^2=2/c_k^3$  et  $s^2=2/(1-\hat{b}_k-(r-3) c_k)^3$

nous avons

$$\Delta_h(c_k, \dots, c_k) = \begin{vmatrix} d + s^2 & s^2 & \dots & s^2 \\ s^2 & d + s^2 & \dots & s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s^2 & s^2 & \dots & d + s^2 \end{vmatrix}$$

Nous le calculons, en additionnant à la première ligne les autres lignes, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} d + (h - 2) s^2 & d + (h - 2) s^2 & \dots & d + (h - 2) s^2 \\ s^2 & d + s^2 & \dots & s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s^2 & s^2 & \dots & d + s^2 \end{vmatrix}$$

puis en soustrayant la première colonne des autres colonnes, nous avons

$$\begin{vmatrix} d + (h - 2) s^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s^2 & d & 0 & \dots & 0 \\ s^2 & 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s^2 & 0 & 0 & \dots & d \end{vmatrix}$$

ce qui donne

$$\Delta_h(c_k, \dots, c_k) = d^{(h-3)} [d + (h - 2) s^2] > 0$$

vrai pour tout  $3 \leq h \leq r-1$ . Ce qui montre que la solution de l'auto-équité  $c_k^{(3)} = \dots = c_k^{(r-1)} = c_k$  donne bien un minimum. (Et ainsi l'auto-équité est bonne, alors que l'inter-équité est mauvaise).

Donc

**PROPOSITION 2 :** *Ayant choisi une (bonne) solution  $(\hat{a}_k, \hat{b}_k)_{k \in \{1, \dots, N\}}$  du problème de la première étape, l'unique bonne solution du problème de la seconde étape est l'auto-équité, c'est-à-dire*

$$\forall j \in \{3, \dots, r - 1\}, \quad c_k^{(j)} = \frac{1 - \hat{b}_k}{r - 2}, \quad k \in \{1, \dots, N\}$$

9. CONCLUSION

PROPOSITION 3 : *Le modèle du Multi-RendezVous (tel qu'il est exposé avec les contraintes*

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a_k < 1 \\ \eta \leq b_k \leq 1 - \eta \quad \text{avec} \quad 0 < \eta < \frac{1}{N}, \\ c_k^{(j)} > 0, \quad j = 3, \dots, r - 1 \\ b_k + \sum_{j=3}^{r-1} c_k^{(j)} < 1 \quad \text{pour} \quad k \in \{1, \dots, N\} \end{array} \right.$$

*et en adoptant comme critère d'optimalité, celui à deux étapes exposé précédemment) possède comme solutions optimales, N! solutions équivalentes, dont l'une est la suivante :*

$$\begin{aligned} & (a_k, b_k, c_k^{(3)}, \dots, c_k^{(r-1)}) \\ &= \left( 1 - \frac{\sqrt{1-\eta}}{(N-1)\sqrt{1-\eta} + \sqrt{(N-1)\eta}}, \eta, \frac{1-\eta}{r-2}, \dots, \frac{1-\eta}{r-2} \right) \end{aligned}$$

*pour*  $k=1, \dots, N-1$  *et*

$$\begin{aligned} & (a_N, b_N, c_N^{(3)}, \dots, c_N^{(r-1)}) \\ &= \left( 1 - \frac{\sqrt{(N-1)\eta}}{(N-1)\sqrt{1-\eta} + \sqrt{(N-1)\eta}}, 1 - (N-1)\eta, \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \frac{(N-1)\eta}{r-2}, \dots, \frac{(N-1)\eta}{r-2} \right). \end{aligned}$$

*Les autres solutions équivalentes s'obtiennent par permutation des indices k, k ∈ {1, ..., N}.*

Nous avons ainsi présenté une modélisation qui permet d'étudier le comportement des processus distribués, plus particulièrement de ceux concernant le contrôle distribué. D'un point de vue pratique, nous avons éclairé la position de l'équité inter-processus, voir si c'est une disposition favorable et nous avons trouvé des valeurs pour les paramètres du modèle pour un fonctionnement optimal.



## BIBLIOGRAPHIE

1. R. BAGRODIA, Process Synchronisation: Design and Performance Evaluation of Distributed Algorithms. *IEEE Trans. on Soft Eng.*, 1989, 15, (9), p. 1053-1065.
2. M. BUI, On Optimal Management of Resources in Distributed Networks, *Optimization*, 1990, 21, (5), p. 785-796.
3. M. BUI, Tuning Distributed Control Algorithms for Optimal Functioning, *J. of Global Optimization*, 1992, 2, p. 177-199.
4. G. GAO et G. V. BOCHMANN, An Virtual Ring Algorithm for the Distributed Implementation of Multi-RendezVous, *Technical Report 675*, Dpt. IRO, Université de Montréal, 1990.
5. I. LAVALLEE, *Algorithmique parallèle et distribuée*, Hermès, 1990.