REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

A. ISSOUFOU KOUADA

Sur la propriété de domination et l'existence de points Pareto-efficaces en optimisation vectorielle convexe

Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 28, nº 1 (1994), p. 77-84.

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1994__28_1_77_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 28, n° 1, 1994, p. 77 à 84)

SUR LA PROPRIÉTÉ DE DOMINATION ET L'EXISTENCE DE POINTS PARETO-EFFICACES EN OPTIMISATION VECTORIELLE CONVEXE (*)

par A. Issoufou KOUADA [1]

Communiqué par Bernard ROY

Résumé. – *Dans les préliminaires, des concepts comme la convexité, la semi-continuité et les cônes asymptotes sont étendus de façon naturelle aux fonctions vectorielles. Les résultats ainsi obtenus sont utilisés pour étudier la propriété de domination dans le problème d'optimisation vectorielle convexe en présence de contraintes. Ainsi, usant de $\mathbb{R}_+^k$ comme cône de domination, nous obtenons des généralisations de résultats connus en la matière. En sous-produits, nous donnons des conditions d'existence de points Pareto-efficaces.*

Mots clés : Convexité, cône, fonction vectorielle, optimisation, domination.

Abstract. – *Concepts such as convexity, semi-continuity and recession cones are extended in a natural way to vector-valued functions in the preliminaries. The results so obtained are used to study the domination property in the constrained convex vector-valued optimization problem. We so obtain, with the first orthant as a domination cone, generalisations of known results on the matter. As by-products, we give conditions for the existence of Pareto-efficient points.*

Keywords: Convexity, cone, vector function, optimization, domination.

1. INTRODUCTION

Ces quinze dernières années, les chercheurs ont été très actifs dans le domaine de l'optimization multi-critère. Le présent article traite d'un aspect du même sujet, à savoir la propriété de domination. Avant de poser explicitement le problème, mentionnons que tout au long de l'article, les ordres usuels sur $\mathbb{R}$ « supérieur ou égal à » et « strictement supérieur à » sont respectivement notés $\geqq$ et $>$. Sur $\mathbb{R}^n$, nous utiliserons les ordres $\geqq$, $\geq$ et $>$ respectivement définis comme suit :

(*) Reçu en novembre 1992.
[1] Département des Mathématiques, Faculté des Sciences, B.P. 10662, Niamey, Niger.

$$x \geqq y \quad \Leftrightarrow \quad x_i \geqq y_i \text{ pour tout } i.$$
$$x \geq y \quad \Leftrightarrow \quad x \geqq y \text{ et il existe i avec } x_i > y_i.$$
$$x > y \quad \Leftrightarrow \quad x_i > y_i \text{ pour tout } i.$$

Soit S une partie de $\mathbb{R}^n$. Son intérieur relatif et sa frontière sont respectivement notés $ir\ S$ et ∂S.

$$- S = \{-x \mid x \in S\}.$$
$$\text{INF } S = \{x \in S \mid \nexists\, y \in S,\ y \leq x\}.$$

Il est bien connu que INF $S \subset \partial S$ de sorte que quand S est un ouvert, alors INF $S = \emptyset$.

Le produit scalaire usuel de x et $y \in \mathbb{R}^n$ est noté xy tandis que le produit de x par une matrice M est noté xM ou Mx dépendant de celui qui est autorisé.

Enfin, on pose $\mathbb{R}^n_+ = \{u \in \mathbb{R}^n | u \geqq o\}$.

2. PRÉLIMINAIRE

Dans ce paragraphe, X est une partie convexe et non vide de $\mathbb{R}^n$ et f est une fonction vectorielle de X dans $\mathbb{R}^k$ avec $k \geqq 2$.

L'épigraphe de f est l'ensemble épi $f = \{(x,\ y) \in X \times \mathbb{R}^k | f\ (x) \leqq y\}$. f est dite convexe si épi f est une partie convexe de $X \times \mathbb{R}^k$.

Ce qui revient à dire que pour tout $\alpha \in]o,\ 1[$, tout $x \in X$ et tout $y \in X$, on a $f\ (\alpha\, x + (1 - \alpha) y) \leqq \alpha\, f\ (x) + (1 - \alpha)\ f\ (y)$. f est convexe si et seulement si (*ssi*) chaque composante f_i est convexe. f est dite concave si $-\ f$ est convexe. f est dite linéaire si elle est à la fois convexe et concave, ce qui signifie que chaque composante f_i est affine. Observons enfin que f est convexe (resp. concave, linéaire) *ssi* pour tout $x \in \mathcal{R}^k$, $a \geqq o$, af est convexe (resp. concave, affine). Le cône asymptote de X est le cône convexe $O^+\ X = \{u \in \mathbb{R}^n | x \in X,\ x + \lambda u \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geqq O\}$. Si en plus X est fermé, alors $O^+ X$ est fermé et on a $O^+\ X = \{u \in \mathbb{R}^n | \exists x \in X,\ x + \lambda u \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geqq o\}$ (*voir*, par exemple, théorème 8.3 dans [9]).

Pour f convexe, l'intersection de O^+ épi f et l'hyperplan « horizontal » $\{(x,\ o) | x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^n\}$ qui est identifiée à la partie de

$$\mathbb{R}^n\ O^+ f = \{u \in \mathbb{R}^n | u \in O^+ X; x \in X; f\ (x + \lambda u) \leqq f\ (x),\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \geqq o\}$$

est dite cône asymptote de f.

Dans ce cas, on a de tout évidence

$$O^+f = \bigcap_{i=1}^{k} O^+f_i \text{ où } O^+f_i$$

$$= \{u \in \mathbb{R}^n | u \in O^+X;\ x \in X;\ f_i(x+\lambda u) \leqq f_i(x),\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \geqq O\}.$$

O^+f ainsi que chaque O^+f_i est aussi un cône convexe dans $\mathbb{R}^n$.

$O^+f_i \cap O^+f_i$ (resp. $O^+f \cap -O^+f$) est l'espace de constance de f_i (resp. f) pour la simple raison que pout tout u de cet espace, une direction de constance de f_i (resp. f) et tout $x \in X$, $f_i(x+\lambda u)$ est une fonction constante de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour chaque i (*voir* corollaire 8.6.1 dans [9]) donc $f(x+\lambda u)$ est une fonction constante de $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour généraliser la notion de semi-continuité à la fonction vectorielle f, on a :

1. Définition : f est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) en $x^o \in X$ si pour tout voisinage V de $f(x^o)$, il existe un voisinage U de x^o tel que pour tout $x \in U \cap X$, il existe $y \in V$ vérifiant $f(x) \geqq y$. f est s.c.i. sur X si elle l'est en tout point de X. ■

2. *Remarque* : En munissant $\mathbb{R}^k$ de la topologie de la norme telle que pour tout $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$, $\|y\| = \sup\{|y_i| \,|i = 1, \dots, k\}$, il est aisé de voir que la définition équivaut à la semi-continuité inférieure de chaque composante f_i de f. Plus, comme à la preuve du lemme 2.3 dans [6], cela revient à dire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^n$ avec $\alpha \geqslant o$, on a f s.c.i. Notons que quand $k = 1$, on a la définition usuelle dans le cas d'une fonction numérique. On pourra convenir que f est semi-continue supérieurement (s.c.s.) en $x^o \in X$ si $-f$ est s.c.i. en x^o. Ainsi f est continue en $x^o \in X$ si elle est à la fois s.c.i. et s.c.s. en x^o. revenant à dire que chaque composante f_i est continue en x^o. Ce sera le cas par exemple quand f est linéaire. ■

3. *Remarque* : Pour tout

$$y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k, \qquad \text{avec} \quad C_y = \{x \in X | f(x) \leqq y\}$$

et $C_{y_i} = \{x \in X | f_i(x) \leqq y_i\}$, on a $C_y = \bigcap_{i=1}^{k} C_{y_i}$. Par conséquent, comme X est convexe, si f est convexe, donc chaque f_i convexe, alors chaque C_{y_i} et donc C_y le seraient aussi. Par ailleurs si f n'est que s.c.i., soit chaque f_i s.c.i., alors chaque C_{y_i} serait fermé et donc C_y serait fermé. Si f est convexe et s.c.i. donc chaquue f_i est convexe et s.c.i., alors chaque $C_{y_i} \neq \varnothing$ aurait pour cône asymptote le cône convexe fermé O^+f_i et par suite si $C_y \neq \varnothing$ alors $O^+C_y = \bigcap_{i=1}^{k} O^+C_{y_i} = \bigcap_{i=1}^{k} O^+f_i = O^+f$, un cône convexe fermé. ■

3. LA PROPRIÉTÉ DE DOMINATION

Dans tout ce paragraphe, X est une partie non vide de R^n qui est convexe et fermée et est soit polyhédrique ou telle que $ir\,X \neq \varnothing$ et f est une fonction vectorielle de X dans $\mathbb{R}^k$ qui est convexe et s. c. i. On considère le problème

$$P : \text{INF}\, f(X),\ f(X) = \{f(x) | x \in X\}.$$

Tout $x^o \in X$ tel que $f(x^o) \in \text{INF}\, f(X)$ est une solution optimale pour P. Dans la littérature consacrée à l'optimisation vectorielle, un tel x^o ou $f(x^o)$ est dit efficace, minimal ou Pareto-efficace pour P. Selon la définition de l'ensemble INF $f(X)$, pour tout $f(x) \in f(X)$ tel que $f(x) \notin \text{INF}\, f(X)$, il existe $f(y) \in f(X)$ tel que $f(y) \leq f(x)$. Cependant, quand même INF $f(X) \neq \varnothing$, nous n'avons aucune garantie que P satisfait la propriété ci-après dite propriété de domination :

(D) : Quand INF $f(X) \neq \varnothing$, alors pour tout $f(x) \in f(X)$.
soit $f(x) \in \text{INF}\, f(X)$ ou il existe $f(y) \in \text{INF}\, f(X)$
tel que $f(y) \leq f(x)$.

L'étude de cette propriété a fait l'objet de plusieurs publications (*voir* [1], [2] et [7] par exemple) surtout quand la relation $\leq$ est définie par un cône non vide, convexe, fermé et pointé C de $\mathbb{R}^k$ comme suit : $x \leq y\ ssi\ x \in y - C = \{y - z | z \in C\}$ et $x \neq y$. Le cas où f est linéaire mais X est non-nécessairement polyhédrique a été considéré dans [1] et [2] par Benson.

Avec $C = \mathbb{R}^k_+$, X polyhédrique et f linéaire, on montre dans [3] que P satisfait (D), résultat pouvant être conclu déjà de [4] ou [5] bien que non explicitement fait. Nous prenons $C = \mathbb{R}^k_+$. Nos résultats généraux seront soutenus pour f non-linéaire et X non-polyhédrique et nous retrouverons sous forme de simples corollaires les résultats qui existent pour les cas particuliers avec $C = \mathbb{R}^k_+$. En marge nous trouverons des conditions d'existence de points Pareto-efficaces.

4. Théorème : *Si* $O^+ f = \{O\}$, *alors* $\text{INF}\, f(X) \neq \varnothing$ *et* P *satisfait* (D). ■

Preuve : Comme $X \neq \varnothing$, soit $x^o \in X$ et pour $i = 1, \ldots, k$, considérons de façon récursive les problèmes

$$P_i : inf\ [f_i(x) | x \in X,\ f(x) \leqq f(x^{i-1})].$$

où pour $i \geqq 2$, x^{i-1} est la solution optimale de P_{i-1} solution qui existe comme nous allons le voir. Avec $y^i = f(x^{i-1})$ pour $i = 1, \ldots, k$, C_{y^i} est l'ensemble des solutions possibles de P_i et il vient de la remarque 3 que

$$O^+C_{y^i} = O^+f = \bigcap_{i=1}^{k} O^+f_i.$$

Si cet ensemble est $\{O\}$, alors $O^+f_i \cap O^+C_{y^i} = \{O\}$. Ainsi, quitte à donner la valeur $+\infty$ à f_i en dehors de C_{y^i}, il vient alors du théorème 27.3 dans [9] que P_i a une solution optimale x^i si x^{i-1} existe. Par récurrence donc chaque P_i aura une solution optimale x_i.

Si $f(x^o) \notin \mathrm{INF}\, f(X)$, alors $f(x^k) \leq f(x^o)$. Si $f(x^k) \notin \mathrm{INF}\, f(X)$, alors il existe $\bar{x} \in X$ tel que $f(\bar{x}) \leq f(x^k)$. Il existe donc $i_o \geqq 1$ tel que $f_{i_o}(\bar{x}) < f_{i_o}(x^k)$ et $f(\bar{x}) \leqq f(x^k) \leqq f(x^{i_o}) \leqq f(x^{i_o-1})$ et x^{i_o} ne serait pas optimale pour P_{i_o}. Cette contradiction permet de conclure que $f(x^k) \in \mathrm{INF}\, f(X)$ qui est par conséquent non vide et $f(x^k) \leqslant f(x^o)$. ■

5. Corollaire : *Si X est compact, alors* INF $f(X) \neq \varnothing$ *et P satisfait* (*D*). ■

Preuve : En effet $O^+X = \{o\}$ et donc $O^+f = \{o\}$. ■

6. Corollaire : *Supposons f telle que $f(x) = Mx$, M étant une $k \times n$-matrice réelle. Si* INF $f(X) \neq \varnothing$ *et* rang $M = n$, *alors P satisfait* (D). ■

Preuve : Comme INF $f(X) \neq \varnothing$, soit $y^o = Mx^o \in \mathrm{INF}\, f(x)$. De la remarque 3, $O^+C_{y^o} = O^+f = \{u \in \mathbb{R}^n | Mu \leqq O,\ u \in O^+X\}$. Supposons qu'il existe $u^o \in O^+C_{y^+}$ avec $Mu^o \leqslant o$. On a $x^o + u^o \in X$ et de plus $M(x^o+u^o) = Mx^o + Mu^o \leq M\lambda^o$ contredisant $\lambda^o = Mx^o \in \mathrm{INF}\, f(X)$. Par conséquent pour tout $u \in O^+C_{y^o}$, on a $Mu = o$ et comme rang $M = n$, nécessairement $u = o$. On a donc $O^+C_{y^o} = O^+f = \{O\}$ et le corollaire découle du théorème. ■

Le corollaire ci-dessus est la version du résultat de Benson dans [2] en prenant $\mathbb{R}^k_+$ pour cône de domination.

7. Corollaire : *Supposons f telle que $f_i(x) = c_i + q_i x + (1/2) x Q_i x$ pour $i = 1...k$ où chaque c_i est une constante réelle, chaque q_i est un n-vecteur réel constant et chaque Q_i est une $n \times n$-matrice réelle, symétrique et semi-définie positive. S'il existe i_o tel que* rang $Q_{i_o} = n$, *alors* INF $f(X) \neq \varnothing$ *et P satisfait* (*D*). ■

Preuve : Notons tout d'abord que chaque f_i est convexe et continue donc *a priori* s.c.i. et donc f est convexe et continue donc s.c.i.

$$O^+f_i = \{u \in \mathbb{R}^n | u \in O^+X,\ Q_i u = o,\ q_i u \leqq o\}$$

donc

$$O^+f = \bigcap_{i=1}^{k} O^+f_i = \{u \in \mathbb{R}^n | u \in O^+X,\ Q_iu = o,\ q_iu \leqq o,\ i = 1, \dots, k\}.$$

Si pour un i_o, rang $Q_{i_o} = n$, alors l'unique solution de $Q_{i_o}u = o$ est $u = o$, donc $O^+f = \{O\}$ et le corollaire découle du théorème. ■

8. Corollaire : *Supposons X polyhédrique et f la restriction à X de h sur* $\mathbb{R}^n$ *telle que* $h(x) = Mx$, *M étant une k* $\times$ *n-matrice réelle. Si* INF $f(X) \neq \emptyset$, *alors* $O^+f = O^+X \cap O^+h \subset -O^+h$ et *P satisfait* (*D*). ■

Preuve : Comme INF $f(X) \neq \emptyset$, soit $\bar{x} \in X$ avec $M\bar{x} \in$ INF $f(X)$ Posons $\bar{y} = M\bar{x}$. Alors de la remarque 3, $O^+C_{\bar{y}} = O^+X \cap O^+h$. Soit $\bar{u} \in O^+C_{\bar{y}}$, alors $\bar{x} + \bar{u} \in X$ et $M(\bar{x} + \bar{u}) = M\bar{x} + M\bar{u}$.

Comme $\bar{u} \in O^+h = \{u \in \mathbb{R}^n | Mu \leqq O\}$, si $Mu \leq O$ on aurait $M(\bar{x} + \bar{u}) \leq M\bar{x}$ contredisant $M\bar{x} \in$ INF $f(X)$. Par conséquent pour tout $u \in O^+X \cap O^+h$, on a $Mu = o$ et donc $u \in -O^+h$. Soit $x^o \in X$ quelconque. Reconsidérons récursivement les problèmes P_i de la preuve du théorème 4 avec les données actuelles. Les x^i étant comme dans la preuve mentionnée, toujours avec $y^i = f(x^{i-1})$, C_{y^i} est un polyhèdre convexe non vide dès lors où nous montrons que chaque P_i possède une solution optimale. Comme $O^+C_{y^i} = O^+X \cap O^+h$ et que nous venons de voir que tout $u \in O^+X \cap O^+h$ est une direction de constance de *h*, il vient du théorème 27.3 de [9] que par récurrence chaque P_i aura une solution optimale. Procédant comme dans la preuve du théorème 4, on conclut que soit $Mx^o \in$ INF $f(X)$ sinon $f(x^k) \in$ INF $f(X)$ avec $f(x^k) \leq f(x^o)$. ■

Dans les mêmes hypothèses, la conclusion « INF $f(X) \neq \emptyset$ implique *P* satisfait (*D*) » du corollaire ci-dessus est l'objet du théorème de Bragard et Vangeldere sur la propriété de domination dans [3].

9. Corollaire : *Supposons* $X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\}$ *où A est une m* $\times$ *n-matrice réelle et* $b \in \mathbb{R}^m$ *et soient h et f comme dans le corollaire précédent. On a* INF $f(X) \neq \emptyset$ *ssi* $O^+f = O^+X \cap O^+h \subset -O^+h$ *et dans ce cas P satisfait* (*D*). ■

Preuve : Si INF $f(X) \neq \phi$, le corollaire précédent dit bien que $O^+f \subset -O^+h$ et *P* satisfait (*D*).

Réciproquement, supposons que pour tout $u \in O^+f = O^+X \cap O^+h$, on a $u \in -O^+h$. Comme

$$O^+h = \{u \in \mathbb{R}^n | Mu \leqq O\} \quad \text{et que} \quad O^+X = \{u \in \mathbb{R}^n | Au = o\},$$

cela veut dire que le système $Mu \leq O. Au = O$ n'a aucune solution $u \in \mathbb{R}^n$. Exploitant le théorème des alternatives de Tucker [8], il existe donc $a \in \mathbb{R}^k. a > o$ et $s \in \mathbb{R}^m$ tels que $aM + sA = O$. Avec h_a telle que $h_a(x) = a M x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et f_a la restriction de h_a à X, on considère le problème linéaire $L(a)$: $\inf f\, [f_a(x) | x \in X]$ ou de façon équivalente $\inf f\, [h_a(x) | x \in X]$. Soit en observant que son dual aussi possède une solution ou établissant que $O^+ f_a = O^+ X \cap O^+ h_a \subset -O^+ h_a$, on conclut que $L(a)$ possède une solution optimale x^o. Comme $a > o$, il est bien connu que $f_a(x^o) \in \mathrm{INF}\, f(X)$ qui est par conséquent non vide. ■

10. *Remarque* : Il convient d'observer que la condition nécesaire et suffisante $O^+ f \subset -O^+ h$ de non vacuité de INF $f(X)$ dans le corollaire 9 signifie que tout élément de $O^+ f = O^+ X \cap O^+ h$ est une direction de constance de h, ce qui revient à dire que le système $Mu \leqslant O$, $Au = O$ n'a aucune solution $u \in \mathbb{R}^n$. ■

Il ressort donc que dans les hypothèses de chacun des deux derniers corollaires, si INF $f(X) \neq \varnothing$ alors P satisfait (D). Cette observation peut être généralisée de la façon suivante :

11. Théorème : *Supposons X polyhédrique et f la restriction à X de g convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k$. Si $O^+ f = O^+ X \cap O^+ g \subset -O^+ g$, autrement dit si tout élément de $O^+ f$ est une direction de constance de g, alors* INF $f(X) \neq \varnothing$ *et P satisfait (D).* ■

Preuve : Notons tout d'abord que g donc f est continue donc s.c.i.

Comme $X \neq \varnothing$, soit $x^o \in X$ et pour $i = 1, \ldots, k$, considérons de façon récursive les problèmes

P_i' : $\inf\, [g_i(x) | x \in X,\ g(x) \leqq g(x^{i-1})]$ ou de façon équivalente $\inf\, [f_i(x) | x \in X,\ f(x) \leqq f(x^{i-1})]$ où pour $i \geqq 2$, x^{i-1} est la solution optimale de P_{i-1}', solution qui existe comme nous allons le voir ici aussi. En supposant que x^{i-1} existe, posons $y^i = g(x^{i-1})$. Alors C_{y^i}, comme à la remarque 3, est l'ensemble des solutions possibles de P_i'.

$$O^+ C_{y^i} = O^+ f = O^+ X \cap O^+ g \subset -O^+ g$$
$$= \bigcap_{i=1}^{k} -O^+ g_i,\quad O^+ C_{y^i} \cap O^+ g_i \subset -O^+ g_i.$$

Le théorème 27.3 dans [9] implique que P_i' possède une solution optimale x^i. Par récurrence donc chaque P_i' possède une solution optimale x^i. Encore une fois soit $f(x^o) \in \mathrm{INF}\, f(X)$ sinon $f(x^k) \in \mathrm{INF}\, f(X)$ avec $f(x^k) \leq f(x^o)$. ■

12. COROLLAIRE : *Supposons X polyhédrique et f à composantes f_i quadratiques comme au corollaire 7 ci-dessus. Supposons en plus chaque f_i bornée en bas sur X. Alors* INF $f(X) \neq \emptyset$ *et P satisfait (D).* ■

Preuve : Avec $g_i(x) = c_i + q_i\, x + (1/2)x\, Q_i\, x$ sur $\mathbb{R}^n$ et f_i la restriction de g_i à X, on a $O^+ g_i = \{u \in \mathbb{R}^n | Q_i\, u = O,\ q_i\, u \leqq O\}$.

Soit $u \in O^+ f = O^+ X \cap O^+ g$ donc $u \in O^+ X \cap O^+ g_i$ pour chaque $i = 1, \ldots, k$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geqq O$, on a $x + \lambda u \in X$ et $g_i(x + \lambda u) = g_i(x) + \lambda q_i u + x Q_i u + (1/2)\lambda^2 u Q_i u$ et comme $u \in O^+ g_i$, donc $Q_i\, u = o$, on a $g_i(x + \lambda u) = g_i(x) + \lambda q_i\, u$. Toujours parce que $u \in O^+ g_i$, on a $q_i\, u \leqq o$ et comme g_i est bornée en bas sur X, on doit avoir $q_i u = o$ donc $u \in O^+ g_i \cap -O^+ g_i$. On conclut que $u \in -O^+ g = \bigcap_{i=1}^{k} -O^+ g_i$ et le corollaire découle du théorème. ■

4. CONCLUSION

Nous avons donné des conditions dans lesquelles un problème d'optimisation multi-critère en présence de contraintes satisfait la propriété de domination avec $\mathbb{R}^k_+$ pour cône de domination. En sous-produits, nous avons obtenu des conditions dans lesquelles des points Pareto-efficaces existent. Ces conditions semblent être des généralisations de conditions d'existence de solutions optimales dans des problèmes d'optimisation scalaire convexe ordinaires. Il importe enfin de noter le rôle capital de la convexité tout au long de l'article.

REFERENCES

1. H. P. BENSON, On a domination property for Vector-maximization with Respect to Cones, 1983, *JOTA, 39*, n°1.
2. H. P. BENSON, On a domination property for Vector-maximization with Respect to Cones, 1984, *JOTA, 43*, n°3.
3. L. BRAGARD et J. VANGELDERE, Points efficaces en programmation à objectifs multiples, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 1977, *46*, p. 27-41.
4. J. G. ECKER et I. A. KOUADA, Finding Efficient Points for Linear Multiple Objective Programs, Mathematical Programming, 1975, *8*, p. 375-377.
5. H. ISERMANN, Proper Efficiency and Linear Vector-Maximization Problems, *OR.*, 1977, *22*, p. 189–191.
6. D. T. LUC, On Duality Theory in Multiobjective Programming, *JOTA*, *43*, n°4.
7. D. T. LUC, On the Domination Property in Vector Optimization, *JOTA*, 1984, *43*, n°2.
8. Olvi L. MANGASARIAN, *Nonlinear Programming*, McGraw Hill Book Company, New York, 1969.
9. R. Tyrell ROCKAFELLAR, Convex analysis, Princeton University Press, Princeton, 1972, New Jersey.